Paralelné algoritmy, časť č. 8

František Mráz

Kabinet software a výuky informatiky, MFF UK, Praha

Paralelné algoritmy, 2011/2012

Obsah

"Zorientovanie" grafu

Vstup: $G = (V, E)$ neorientovaný alebo orientovaný Eulerovský graf

Výstup: Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami

Predspracovanie pre neorientovaný graf $H = (V, E)$ – voľba orientácie hrán

hranu $\{i, j\}$ nahradíme dvojicou orientovaných hrán (i, j) a (j, i); jednu z nich musíme "zahodiť"

reprezentácia: zoznam hrán $EDGE$ v poli veľkosti $2|E|$

$EDGE$ lexikograficky utriedime – čas $O(\log |E|)$ s $O(|E|)$ procesormi

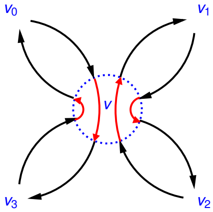
dostaneme $EDGE'$, kde hrany vychádzajúce z jedného vrcholu v idú za sebou a môžeme ich oindexovať (v, v_0), (v, v_1), ..., (v, v_{d-1}), kde d je stupeň vrcholu v v grafe H

"Zorientovanie" grafu

dokončenie

- definujeme následníka hrany: pre každé $v \in V$ a i nepárne

  $SUCCESSOR[(v_i, v)] \quad := \quad (v, v_{i+1})$

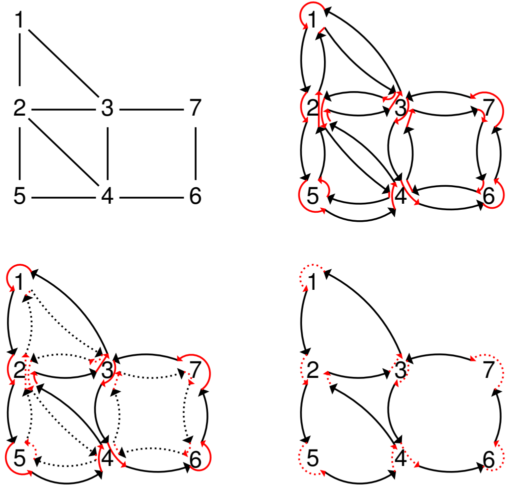


  $SUCCESSOR[(v_{i+1}, v)] \quad := \quad (v, v_i)$

  ($i + 1$ sa počíta modulo d)
- tým sa vytvoria cykly s tým, že ak tam bude cyklus C, tak tam bude aj opačne orientovaný cyklus C' cez tie isté vrcholy
- práve jeden z dvojice cyklov C, C' zrušíme: napr. lexikograficky utriedime hrany cyklu a ten z cyklov C, C', ktorý má lexikograficky väčšiu lexikograficky minimálnu hranu zrušíme a jeho zoznam hrán vyradíme z $EDGE$

"Zorientovanie" grafu

Príklad



Krok 1 – vytvorenie cyklov

pre Eulerovský orientovaný graf

- *EDGE* je zoznam hrán grafu; utriedime podľa opačného lexikografického usporiadania (najprv 2. zložka, potom 1.)
- $SUCCESSOR := EDGE$
- *SUCCESSOR* utriedime podľa lexikografického usporiadania; pri triedení si udržujeme $P[h]$ – pôvodná poloha h-tej hrany (i, j) v poli *EDGE* spolu s hranou (i, j)
  EDGE a *SUCCESSOR* definujú cykly

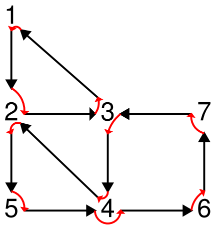
$$EDGE[P[h]] = SUCCESSOR[h]$$

h	1	2	3	4	5	...
EDGE	$(2,1)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(5,2)$	$(1,3)$	...
SUCC	$(1,3)$	$(1,5)$	$(2,1)$	$(2,4)$	$(3,2)$	...
P	5	10	1	8	3	...

- čas $O(\log|E|) = O(\log|V|) = O(\log n)$ s $O(m)$ procesormi pre $n = O(|V|)$ a $m = O(|E|)$

Krok 1 – vytvorenie cyklov

Príklad



h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$EDGE$	$(3,1)$	$(1,2)$	$(4,2)$	$(2,3)$	$(7,3)$	$(3,4)$	$(5,4)$	$(2,5)$	$(4,6)$	$(6,7)$
$SUCC$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(2,5)$	$(3,1)$	$(3,4)$	$(4,2)$	$(4,6)$	$(5,4)$	$(6,7)$	$(7,3)$
P	2	4	8	1	6	3	9	7	10	5

Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

- reprezentant cyklu = lexikograficky najmenšia hrana cyklu – zdvojovaním cez $P[h]$
- čas $O(\log n)$ s $O(m)$ procesormi
- ozn. C množinu reprezentantov (hrán) cyklov
  skonštruujeme bipartidný graf $G' = (V', E')$ kde $V' = V \cup C$,
  $E' = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in C, u$ je v cykle reprezentovanom $v\}$

  for all $1 \leq i \leq m$ **in parallel do**
      for $EDGE[i] = (u, v)$ **do**
          begin $EDGE'[2i-1] := (u, CYCREP[i])$
                  $EDGE'[2i] := (v, CYCREP[i])$

- čas $O(1)$, $O(m)$ procesorov

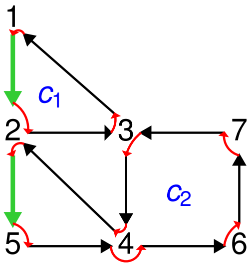
Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

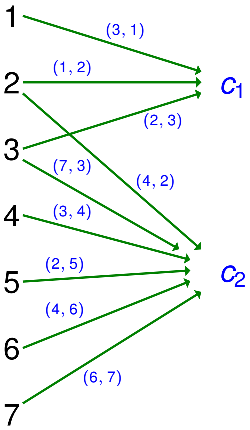
pokračovanie

- každý vrchol prispeje do $EDGE'$ aspoň dvakrát a môže ležať vo viacerých cykloch, cyklus môže cez jeden vrchol prechádzať viackrát
- odstránime duplikáty – lexikograficky utriedime $EDGE$ a vynecháme duplikáty (kompresiou poľa)
- pritom si pre každú hranu $(u, v) \in EDGE'$ pamätáme reprezentanta – $CERTIFICATE[(u, e)]$ – hrana vchádzajúca do u a ležiaca v cykle obsahujúcom hranu e
- celkovo m procesorov a čas $O(\log n)$

Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

Príklad





Krok 3 – kostra grafu G'

- kostra T – čas $O(\log^2 n)$ s $O(\frac{n^2}{\log^2 n})$ procesormi
- T je strom, ku každej hrane pridáme opačne orientovanú hranu $\Rightarrow$ graf T'
- na T' postavíme Eulerovský cyklus

Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

Veľký cyklus bude obsahovať hrany z T' a z G. Poradie hrán z G definuje Eulerovský cyklus pre G a hrany z T' tvoria Eulerovský cyklus pre T'.

- definujeme cyklické usporiadanie hrán incidentných s vrcholom $w \in C$ – $\{v_0, w\}, \{v_1, w\}, \ldots, \{v_{d-1}, w\}$:
- pre $0 \leq \alpha \leq d-1$ nech
  (i_α, v_α) označuje $CERTIFICATE[(v_\alpha, w)]$ a
  (v_α, j_α) označuje $SUCCESSOR[(i_\alpha, v_\alpha)]$ po Kroku 1
- upravíme $EDGE$ a $SUCCESSOR$:
  - do $EDGE$ pridáme hrany z T'
  - $\forall w \in C$, $0 \leq \alpha \leq d-1$: $\begin{aligned} SUCCESSOR[(v_\alpha, w)] &:= (v_\alpha, j_\alpha) \\ SUCCESSOR[(i_\alpha, v_\alpha)] &:= (w, v_\alpha) \end{aligned}$
  - $\forall v_\alpha, (w, v_\alpha) \in T'$, nech v_α susedí s $w_0, w_1, \ldots, w_{d-1} \in C$, potom $SUCCESSOR[(w_i, v_\alpha)] := (v_\alpha, w_{i+1 \pmod d})$

Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

pokračovanie

- dostávame Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami $G \cup T'$:
  - Každé $w \in C$ definuje prechádzanie jedným cyklom
  - $v \in V$ sú akési “mosty” medzi cyklami z C
  - keď “stiahneme” všetky hrany týchto mostov (tj. vynecháme hrany z T', tak dostaneme Eulerov cyklus pre G
  - zložitosť $O(1)$ krokov s $O(m)$ procesormi
- Celková zložitosť: čas $O(\log^2 n)$ s $O(n^2)$ procesormi.