Paralelné algoritmy, časť č. 12

František Mráz

Kabinet software a výuky informatiky, MFF UK, Praha

Paralelné algoritmy, 2011/2012

Obsah

Maximálne párovanie

[Israeli, Shiloach, 1986]

Vstup: Graf reprezentovaný zoznamom susedností.

Schéma:

Maximálne párovanie

[Israeli, Shiloach, 1986]

Vstup: Graf reprezentovaný zoznamom susednosti.
Výstup: Množinovo maximálne párovanie.

Schéma:

Maximálne párovanie

[Israeli, Shiloach, 1986]

Vstup: Graf reprezentovaný zoznamom susednosti.
Výstup: Množinovo maximálne párovanie.

Schéma:

- $\log_{\frac{3}{2}}$ fáz (fázy ozn. F_i)

Maximálne párovanie

[Israeli, Shiloach, 1986]

Vstup: Graf reprezentovaný zoznamom susednosti.
Výstup: Množinovo maximálne párovanie.

Schéma:

- $\log_{\frac{3}{2}}$ fáz (fázy ozn. F_i)
- Fáza F_i:

Maximálne párovanie

[Israeli, Shiloach, 1986]

Vstup: Graf reprezentovaný zoznamom susednosti.
Výstup: Množinovo maximálne párovanie.

Schéma:

- $\log_{\frac{3}{2}}$ fáz (fázy ozn. F_i)
- Fáza F_i:
  - vstup graf G_i

Maximálne párovanie

[Israeli, Shiloach, 1986]

Vstup: Graf reprezentovaný zoznamom susednosti.
Výstup: Množinovo maximálne párovanie.

Schéma:

- $\log_{\frac{3}{2}}$ fáz (fázy ozn. F_i)
- Fáza F_i:
    - vstup graf G_i
    - určiť nejaké párovanie M_i v G_i

Maximálne párovanie

[Israeli, Shiloach, 1986]

Vstup: Graf reprezentovaný zoznamom susednosti.
Výstup: Množinovo maximálne párovanie.

Schéma:

- $\log_{\frac{3}{2}}$ fáz (fázy ozn. F_i)
- Fáza F_i:
  - vstup graf G_i
  - určiť nejaké párovanie M_i v G_i
  - skonštruovať graf G_{i+1}: vynechať z G_i hrany a vrcholy z M_i a hrany incidentné s vrcholmi z M_i

Maximálne párovanie

[Israeli, Shiloach, 1986]

Vstup: Graf reprezentovaný zoznamom susednosti.
Výstup: Množinovo maximálne párovanie.

Schéma:

- $\log_{\frac{3}{2}}$ fáz (fázy ozn. F_i)
- Fáza F_i:
  - vstup graf G_i
  - určiť nejaké párovanie M_i v G_i
  - skonštruovať graf G_{i+1}: vynechať z G_i hrany a vrcholy z M_i a hrany incidentné s vrcholmi z M_i
- každá fáza sa skladá z maximálne $1 + \lceil \log \Delta(G_i) \rceil$ aplikácií procedúry DEGREESPLIT na graf G_i (vstupný pre celú fázu), kde $\Delta(G_i)$ je maximálny stupeň vrcholu v grafe G_i.

Maximálne párovanie

[Israeli, Shiloach, 1986]

Vstup: Graf reprezentovaný zoznamom susednosti.
Výstup: Množinovo maximálne párovanie.

Schéma:

- $\log_{\frac{3}{2}}$ fáz (fázy ozn. F_i)
- Fáza F_i:
  - vstup graf G_i
  - určiť nejaké párovanie M_i v G_i
  - skonštruovať graf G_{i+1}: vynechať z G_i hrany a vrcholy z M_i a hrany incidentné s vrcholmi z M_i
- každá fáza sa skladá z maximálne $1 + \lceil \log \Delta(G_i) \rceil$ aplikácií procedúry DEGREESPLIT na graf G_i (vstupný pre celú fázu), kde $\Delta(G_i)$ je maximálny stupeň vrcholu v grafe G_i.
- vstupom do 1. fázy je vstupný graf

Schéma algoritmu a prechod medzi fázami

Schéma výpočtu

$$\begin{array}{lllllllll} G & = & G_{1,1} & \to & G_{1,2} & \to \cdots \to & G_{1,n_1} = M_1 & & \text{párovanie} \\ & & G_{2,1} & \to & G_{2,2} & \to \cdots \to & G_{2,n_2} = M_2 & & \text{párovanie} \\ \ldots & & & & & & & & \end{array}$$

Výsledné párovanie bude $\bigcup_i M_i$.

$G_{i,j} \to G_{i+1,1}$ – prechod do nasledujúcej fázy:

- $G_{i,j}$ je párovanie – pridáme ho do výsledného párovania
- vezmeme všetky izolované vrcholy z $G_{i,j}$ a $G_{i+1,1}$ je úplný podgraf G na týchto vrcholoch
- čas $O(\log n)$, kde n je počet vrcholov
- počet procesorov $O(m)$, kde m je počet hrán

Jeden krok fázy

$G_{i,j} \to G_{i,j+1}$ – procedúra DEGREESPLIT:

- $G_{i,j}$ nie je párovanie, nech Δ je maximálny stupeň vrcholu z $G_{i,j}$
- vytvoríme graf $G^*_{i,j}$
  - vrcholy: všetky vrcholy z $G_{i,j}$ stupňa $\geq 2^{\lfloor \log \Delta \rfloor - 1}$ a všetky vrcholy, ktoré sú s takými vrcholmi spojené hranou; naviac pridáme špeciálny vrchol u.
  - hrany: $\{v, w\}$ je hrana v $G^*_{i,j} \Leftrightarrow_{df} v$, w sú vrcholy $G^*_{i,j}$ a $\{v, w\}$ je hrana v $G_{i,j}$; naviac pridáme hrany $\{u, v\}$, ak je stupeň vrcholu v v $G^*_{i,j}$ nepárny (aj vrchol u bude potom mať párny stupeň).
- nájdeme komponenty grafu $G^*_{i,j}$ a v každej komponente nájdeme Eulerov cyklus

Počet volaní DEGREESPLIT

- hrany cyklov označíme striedavo 0 a 1:
  1. u cyklov, ktoré neobsahujú u, začneme z ľubovoľného vrcholu a prvú hranu označíme 1
  2. u cyklov, ktoré obsahujú u, začneme z u a prvú hranu označíme 0

  Napr. v každom cykle c zvolíme jednu hranu e_c a spočítame paritu vzdialenosti každej hrany cyklu od e_c.
- $G_{i,j+1}$ dostaneme z $G_{i,j}$ vynechaním hrán ohodnotených 0

Definícia

Nech k je najmenšie celé číslo (menšie z dvoch možných), pre ktoré $2^k \leq \Delta(G) \leq 2^{k+1} + 1$, potom vrchol v sa nazýva aktívny vrchol, ak stupeň vrcholu $d(v) \geq 2^k$.

zrejme $k = \lfloor \log(\Delta(G) - 2) \rfloor$

Počet volaní DEGREESPLIT

Veta

Keď Δ je maximálny stupeň vrcholu v $G_{i,j}$ a Δ_1 je maximálny stupeň vrcholu v $G_{i,j+1}$, potom pre $\Delta > 2$ platí

$$\left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor + 1 \geq \Delta_1 \geq \left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor .$$

$\Rightarrow$ po maximálne rádovo $\lceil \log \Delta \rceil$ krokoch (DEGREESPLIT) dostaneme graf s maximálnym stupňom $3 \geq \Delta \geq 1$

Počet volaní DEGREESPLIT

Veta

Keď Δ je maximálny stupeň vrcholu v $G_{i,j}$ a Δ_1 je maximálny stupeň vrcholu v $G_{i,j+1}$, potom pre $\Delta > 2$ platí

$$\left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor + 1 \geq \Delta_1 \geq \left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor .$$

$\Rightarrow$ po maximálne rádovo $\lceil \log \Delta \rceil$ krokoch (DEGREESPLIT) dostaneme graf s maximálnym stupňom $3 \geq \Delta \geq 1$

- ak je nejaký vrchol aktívny v $G_{i,j}$, tak bude aktívny vo všetkých nasledujúcich krokoch fázy $G_{i,j'}$, pre $j' > j$

Počet volaní DEGREESPLIT v jednej fáze

- nech $2^k \leq \Delta(G_{i,1}) \leq 2^{k+1} + 1$

Počet volaní DEGREESPLIT v jednej fáze

- nech $2^k \leq \Delta(G_{i,1}) \leq 2^{k+1} + 1$
- po maximálne k krokoch (DEGREESPLIT) dostaneme graf s maximálnym stupňom $3 \geq \Delta \geq 1$.

Počet volaní DEGREESPLIT v jednej fáze

- nech $2^k \leq \Delta(G_{i,1}) \leq 2^{k+1} + 1$
- po maximálne k krokoch (DEGREESPLIT) dostaneme graf s maximálnym stupňom $3 \geq \Delta \geq 1$.
- vtedy budú aktívne (budú sa účastniť) všetky vrcholy G_i, ktoré sa zaktivizujú v tejto fáze

Počet volaní DEGREESPLIT v jednej fáze

- nech $2^k \leq \Delta(G_{i,1}) \leq 2^{k+1} + 1$
- po maximálne k krokoch (DEGREESPLIT) dostaneme graf s maximálnym stupňom $3 \geq \Delta \geq 1$.
- vtedy budú aktívne (budú sa účastniť) všetky vrcholy G_i, ktoré sa zaktivizujú v tejto fáze
- potom stačia maximálne 2 aplikácie modifikovanej DEGREESPLIT na to, aby nám z grafu zostalo párovanie

Počet volaní DEGREESPLIT v jednej fáze

- nech $2^k \le \Delta(G_{i,1}) \le 2^{k+1} + 1$
- po maximálne k krokoch (DEGREESPLIT) dostaneme graf s maximálnym stupňom $3 \ge \Delta \ge 1$.
- vtedy budú aktívne (budú sa účastniť) všetky vrcholy G_i, ktoré sa zaktivizujú v tejto fáze
- potom stačia maximálne 2 aplikácie modifikovanej DEGREESPLIT na to, aby nám z grafu zostalo párovanie
- $\Rightarrow$ na jednu fázu stačí $O(\log n)$ volaní procedúry DEGREESPLIT

Počet fáz

Idea: Ak v nejakom grafe existuje vrcholové pokrytie veľkosti ℓ, tak žiadne párovanie v tomto grafe nemôže mať viacej než ℓ hrán.
Dokážeme, že ak $G_{i+1,1}$ je neprázdny graf, tak má vrcholové pokrytie C_{i+1} také, že $|C_{i+1}| \leq \frac{2|C_i|}{3}$. Keď vezmeme $C_1 = V$, tak $|C_i| = 0$, pre $i = \log_{\frac{3}{2}} |V| \Rightarrow$ stačí logaritmický počet fáz.

- nech A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3

Počet fáz

Idea: Ak v nejakom grafe existuje vrcholové pokrytie veľkosti ℓ, tak žiadne párovanie v tomto grafe nemôže mať viacej než ℓ hrán.
Dokážeme, že ak $G_{i+1,1}$ je neprázdny graf, tak má vrcholové pokrytie C_{i+1} také, že $|C_{i+1}| \leq \frac{2|C_i|}{3}$. Keď vezmeme $C_1 = V$, tak $|C_i| = 0$, pre $i = \log_{\frac{3}{2}} |V| \Rightarrow$ stačí logaritmický počet fáz.

- nech A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3
- A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$

Počet fáz

Idea: Ak v nejakom grafe existuje vrcholové pokrytie veľkosti ℓ, tak žiadne párovanie v tomto grafe nemôže mať viacej než ℓ hrán.
Dokážeme, že ak $G_{i+1,1}$ je neprázdny graf, tak má vrcholové pokrytie C_{i+1} také, že $|C_{i+1}| \leq \frac{2|C_i|}{3}$. Keď vezmeme $C_1 = V$, tak $|C_i| = 0$, pre $i = \log_{\frac{3}{2}} |V| \Rightarrow$ stačí logaritmický počet fáz.

- nech A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3
- A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$
    - (sporom) nech existuje hrana u, v taká, že ani u ani v neboli aktívne v žiadnom kroku fázy F_i

Počet fáz

Idea: Ak v nejakom grafe existuje vrcholové pokrytie veľkosti ℓ, tak žiadne párovanie v tomto grafe nemôže mať viacej než ℓ hrán.
Dokážeme, že ak $G_{i+1,1}$ je neprázdny graf, tak má vrcholové pokrytie C_{i+1} také, že $|C_{i+1}| \leq \frac{2|C_i|}{3}$. Keď vezmeme $C_1 = V$, tak $|C_i| = 0$, pre $i = \log_{\frac{3}{2}} |V| \Rightarrow$ stačí logaritmický počet fáz.

- nech A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3
- A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$
  - (sporom) nech existuje hrana u, v taká, že ani u ani v neboli aktívne v žiadnom kroku fázy F_i
  - DEGREESPLIT vyhadzuje iba hrany spojené s aktívnymi vrcholmi

Počet fáz

Idea: Ak v nejakom grafe existuje vrcholové pokrytie veľkosti ℓ, tak žiadne párovanie v tomto grafe nemôže mať viacej než ℓ hrán.
Dokážeme, že ak $G_{i+1,1}$ je neprázdny graf, tak má vrcholové pokrytie C_{i+1} také, že $|C_{i+1}| \leq \frac{2|C_i|}{3}$. Keď vezmeme $C_1 = V$, tak $|C_i| = 0$, pre $i = \log_{\frac{3}{2}} |V| \Rightarrow$ stačí logaritmický počet fáz.

- nech A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3
- A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$
  - (sporom) nech existuje hrana u, v taká, že ani u ani v neboli aktívne v žiadnom kroku fázy F_i
  - DEGREESPLIT vyhadzuje iba hrany spojené s aktívnymi vrcholmi
  - hrana u, v nebola vynechaná procedúrou DEGREESPLIT, teda u aj v museli byť aktívne na konci fázy F_i

Počet fáz

Idea: Ak v nejakom grafe existuje vrcholové pokrytie veľkosti ℓ, tak žiadne párovanie v tomto grafe nemôže mať viacej než ℓ hrán.
Dokážeme, že ak $G_{i+1,1}$ je neprázdny graf, tak má vrcholové pokrytie C_{i+1} také, že $|C_{i+1}| \leq \frac{2|C_i|}{3}$. Keď vezmeme $C_1 = V$, tak $|C_i| = 0$, pre $i = \log_{\frac{3}{2}} |V| \Rightarrow$ stačí logaritmický počet fáz.

- nech A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3
- A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$
    - (sporom) nech existuje hrana u, v taká, že ani u ani v neboli aktívne v žiadnom kroku fázy F_i
    - DEGREESPLIT vyhadzuje iba hrany spojené s aktívnymi vrcholmi
    - hrana u, v nebola vynechaná procedúrou DEGREESPLIT, teda u aj v museli byť aktívne na konci fázy F_i

1. ukážeme, že aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i (volania DEGREESPLIT, keď maximálny stupeň klesne na 3 alebo menej budú modifikované!)

Počet fáz

Idea: Ak v nejakom grafe existuje vrcholové pokrytie veľkosti ℓ, tak žiadne párovanie v tomto grafe nemôže mať viacej než ℓ hrán. Dokážeme, že ak $G_{i+1,1}$ je neprázdny graf, tak má vrcholové pokrytie C_{i+1} také, že $|C_{i+1}| \leq \frac{2|C_i|}{3}$. Keď vezmeme $C_1 = V$, tak $|C_i| = 0$, pre $i = \log_{\frac{3}{2}} |V| \Rightarrow$ stačí logaritmický počet fáz.

- nech A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3
- A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$
    - (sporom) nech existuje hrana u, v taká, že ani u ani v neboli aktívne v žiadnom kroku fázy F_i
    - DEGREESPLIT vyhadzuje iba hrany spojené s aktívnymi vrcholmi
    - hrana u, v nebola vynechaná procedúrou DEGREESPLIT, teda u aj v museli byť aktívne na konci fázy F_i

1. ukážeme, že aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i (volania DEGREESPLIT, keď maximálny stupeň klesne na 3 alebo menej budú modifikované!)
2. dokážeme, že pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

- A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3, A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

- A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3, A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$
- nech v kroku k fázy klesne max. stupeň vrcholu medzi 1 a 3; nech $G_{i,k}$ má k_i hrán

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

- A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3, A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$
- nech v kroku k fázy klesne max. stupeň vrcholu medzi 1 a 3; nech $G_{i,k}$ má k_i hrán
- bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $G_{i,k}$ je súvislý (ďalší postup aplikujme po komponentách súvislosti $G_{i,k}$)

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

- A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3, A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$
- nech v kroku k fázy klesne max. stupeň vrcholu medzi 1 a 3; nech $G_{i,k}$ má k_i hrán
- bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $G_{i,k}$ je súvislý (ďalší postup aplikujme po komponentách súvislosti $G_{i,k}$)
- procedúru DEGREESPLIT modifikujeme – namiesto vyhadzovania vrcholov označených 0, budeme vyhadzovať menšiu z množín: hrany označené 0 alebo hrany označené 1

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

- A_i je množina vrcholov aktívnych vo fáze i, keď je max. stupeň Δ medzi 1 a 3, A_i je vrcholové pokrytie $G_{i,1}$
- nech v kroku k fázy klesne max. stupeň vrcholu medzi 1 a 3; nech $G_{i,k}$ má k_i hrán
- bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $G_{i,k}$ je súvislý (ďalší postup aplikujme po komponentách súvislosti $G_{i,k}$)
- procedúru DEGREESPLIT modifikujeme – namiesto vyhadzovania vrcholov označených 0, budeme vyhadzovať menšiu z množín: hrany označené 0 alebo hrany označené 1
- dvomi aplikáciami DEGREESPLIT sa počet hrán zredukuje maximálne na $\frac{1}{4}k_i \Rightarrow$ párovanie, ktoré dostaneme na konci i-tej fázy má aspoň $\frac{k_i}{2}$ spárovaných vrcholov

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

1. ak $k_i \geq |A_i|$, tak v párovaní M_i bude aspoň $\frac{k_i}{2} \geq \frac{|A_i|}{2}$ z A_i

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

1. ak $k_i \geq |A_i|$, tak v párovaní M_i bude aspoň $\frac{k_i}{2} \geq \frac{|A_i|}{2}$ z A_i
2. inak $k_i = |A_i| - 1$ a $G_{i,k}$ je strom (je súvislý).

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

1. ak $k_i \geq |A_i|$, tak v párovaní M_i bude aspoň $\frac{k_i}{2} \geq \frac{|A_i|}{2}$ z A_i
2. inak $k_i = |A_i| - 1$ a $G_{i,k}$ je strom (je súvislý).
   - z $G_{i,k}$ vyberieme ľubovoľnú hranu vedúcu do listu – pridáme ju k párovaniu

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

1. ak $k_i \geq |A_i|$, tak v párovaní M_i bude aspoň $\frac{k_i}{2} \geq \frac{|A_i|}{2}$ z A_i
2. inak $k_i = |A_i| - 1$ a $G_{i,k}$ je strom (je súvislý).
   - z $G_{i,k}$ vyberieme ľubovoľnú hranu vedúcu do listu – pridáme ju k párovaniu
   - vyhodíme incidentné hrany (max. 2, pretože max stupeň vrcholu v $G_{i,k}$ je 3); strom sa rozpadne na maximálne dva stromy T_1 a T_2 s n_1 a n_2 vrcholmi

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

1. ak $k_i \geq |A_i|$, tak v párovaní M_i bude aspoň $\frac{k_i}{2} \geq \frac{|A_i|}{2}$ z A_i
2. inak $k_i = |A_i| - 1$ a $G_{i,k}$ je strom (je súvislý).
    - z $G_{i,k}$ vyberieme ľubovoľnú hranu vedúcu do listu – pridáme ju k párovaniu
    - vyhodíme incidentné hrany (max. 2, pretože max stupeň vrcholu v $G_{i,k}$ je 3); strom sa rozpadne na maximálne dva stromy T_1 a T_2 s n_1 a n_2 vrcholmi
    - na oba T_1 a T_2 aplikujeme modifikovanú DEGREESPLIT; dohromady prispejú aspoň $\frac{(n_1-1)}{4} + \frac{(n_2-1)}{4}$ hranami do párovania M_i

Aspoň polovica vrcholov z A_i bude incidentná s hranami z M_i

1. ak $k_i \geq |A_i|$, tak v párovaní M_i bude aspoň $\frac{k_i}{2} \geq \frac{|A_i|}{2}$ z A_i
2. inak $k_i = |A_i| - 1$ a $G_{i,k}$ je strom (je súvislý).
   - z $G_{i,k}$ vyberieme ľubovoľnú hranu vedúcu do listu – pridáme ju k párovaniu
   - vyhodíme incidentné hrany (max. 2, pretože max stupeň vrcholu v $G_{i,k}$ je 3); strom sa rozpadne na maximálne dva stromy T_1 a T_2 s n_1 a n_2 vrcholmi
   - na oba T_1 a T_2 aplikujeme modifikovanú DEGREESPLIT; dohromady prispejú aspoň $\frac{(n_1-1)}{4} + \frac{(n_2-1)}{4}$ hranami do párovania M_i
   - párovania z T_1 a T_2 a odobraná hrana prispejú aspoň $\frac{(n_1-1)+(n_2-1)}{2} + 2 \geq \frac{|A_i|}{2}$ vrcholmi do M_i

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo
- nech tvrdenie platí pre i, ukážeme, že potom platí i pre $i + 1$

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo
- nech tvrdenie platí pre i, ukážeme, že potom platí i pre $i + 1$

  buď $|A_i| \leq \frac{4}{3}|C_i|$: aspoň polovica vrcholov z A_i sa dostala do párovania M_i; za C_{i+1} vezmeme $A_i|_{G_{i+1}}$; potom

$$\left|A_i|_{G_{i+1}}\right| \leq \frac{|A_i|}{2} \leq \frac{\frac{4}{3}|C_i|}{2} = \frac{2}{3}|C_i|$$

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo
- nech tvrdenie platí pre i, ukážeme, že potom platí i pre $i + 1$

  buď $|A_i| \leq \frac{4}{3}|C_i|$: aspoň polovica vrcholov z A_i sa dostala do párovania M_i; za C_{i+1} vezmeme $A_i|_{G_{i+1}}$; potom

$$\left|A_i|_{G_{i+1}}\right| \leq \frac{|A_i|}{2} \leq \frac{\frac{4}{3}|C_i|}{2} = \frac{2}{3}|C_i|$$

  alebo $|A_i| > \frac{4}{3}|C_i|$:

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo
- nech tvrdenie platí pre i, ukážeme, že potom platí i pre $i + 1$

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo
- nech tvrdenie platí pre i, ukážeme, že potom platí i pre $i + 1$

  buď $|A_i| \leq \frac{4}{3}|C_i|$:

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo
- nech tvrdenie platí pre i, ukážeme, že potom platí i pre $i + 1$

  buď $|A_i| \leq \frac{4}{3}|C_i|$:

  alebo $|A_i| > \frac{4}{3}|C_i|$: potom

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo
- nech tvrdenie platí pre i, ukážeme, že potom platí i pre $i + 1$

  buď $|A_i| \leq \frac{4}{3}|C_i|$:

  alebo $|A_i| > \frac{4}{3}|C_i|$: potom

  - C_i je vrcholové pokrytie G_i, každá hrana z M_i má v C_i aspoň jeden vrchol a M_i má aspoň $\frac{|A_i|}{4}$ hrán, teda $|C_i| \geq \frac{|A_i|}{4}$

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo
- nech tvrdenie platí pre i, ukážeme, že potom platí i pre $i + 1$

  buď $|A_i| \leq \frac{4}{3}|C_i|$:

  alebo $|A_i| > \frac{4}{3}|C_i|$: potom

  - C_i je vrcholové pokrytie G_i, každá hrana z M_i má v C_i aspoň jeden vrchol a M_i má aspoň $\frac{|A_i|}{4}$ hrán, teda $|C_i| \geq \frac{|A_i|}{4}$
  - za C_{i+1} vezmeme $C_i|_{G_{i+1}}$, čo je vrcholové pokrytie G_{i+1}

Veľkosť vrcholových pokrytí

Lemma

Pre všetky i, $1 \leq i \leq \log_{\frac{3}{2}} |V|$, má graf $G_{i,1}$ vrcholové pokrytie C_i také, že $|C_i| \leq (\frac{2}{3})^{i-1}|V|$.

dôkaz indukciou podľa i

- pre $i = 1$ vezmeme $C_i = V$, potom $|C_i| = |V|$, hotovo
- nech tvrdenie platí pre i, ukážeme, že potom platí i pre $i + 1$

  buď $|A_i| \leq \frac{4}{3}|C_i|$:

  alebo $|A_i| > \frac{4}{3}|C_i|$: potom

  - C_i je vrcholové pokrytie G_i, každá hrana z M_i má v C_i aspoň jeden vrchol a M_i má aspoň $\frac{|A_i|}{4}$ hrán, teda $|C_i| \geq \frac{|A_i|}{4}$
  - za C_{i+1} vezmeme $C_i|_{G_{i+1}}$, čo je vrcholové pokrytie G_{i+1}
  - $\left|C_i|_{G_{i+1}}\right| \leq |C_i| - \#\text{vrcholy z } C_i \text{ obsiahnuté v } M_i \leq |C_i| - \frac{|A_i|}{4} \leq |C_i| - \frac{\frac{4}{3}|C_i|}{4} = \frac{2}{3}|C_i|$