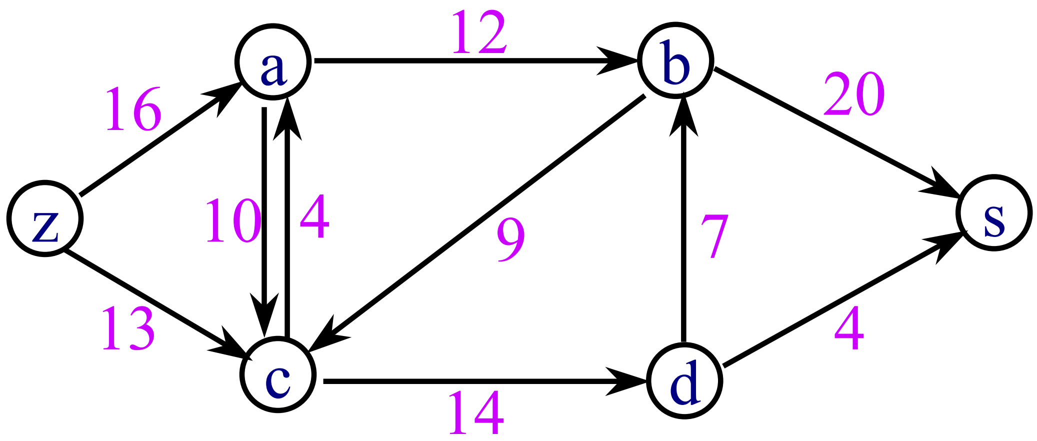
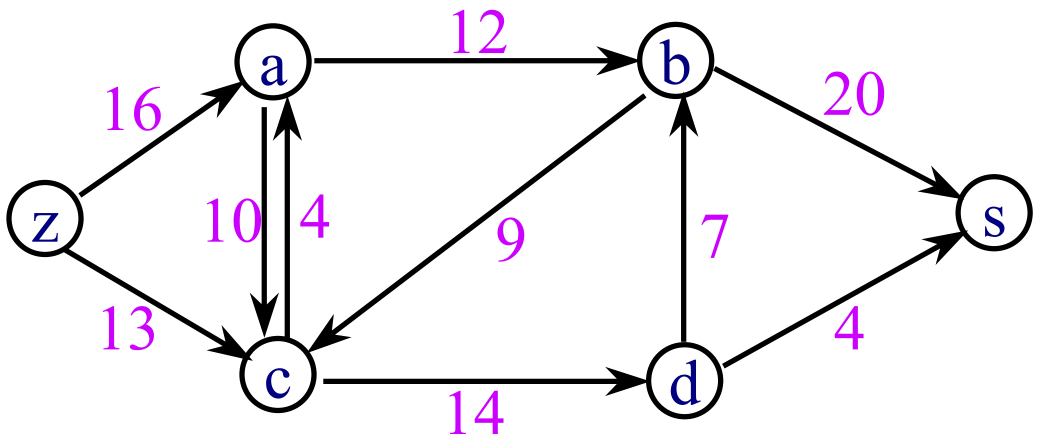
Toky v sítích

Toky v sítích



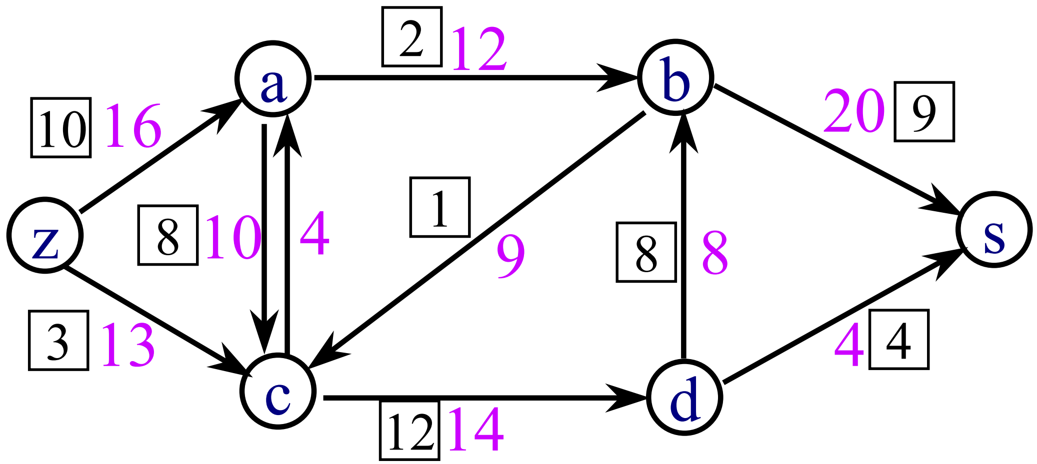
- síť S=(G,c,z,s)
  - G=(V,E) orientovaný graf
  - c: E$\rightarrow$ <0,∞) kapacity hran
  - z,s $\in$V   z zdroj, s spotřebič
- Položme c(u,v)=0 pro (u,v)$\notin$E

Tok v síti



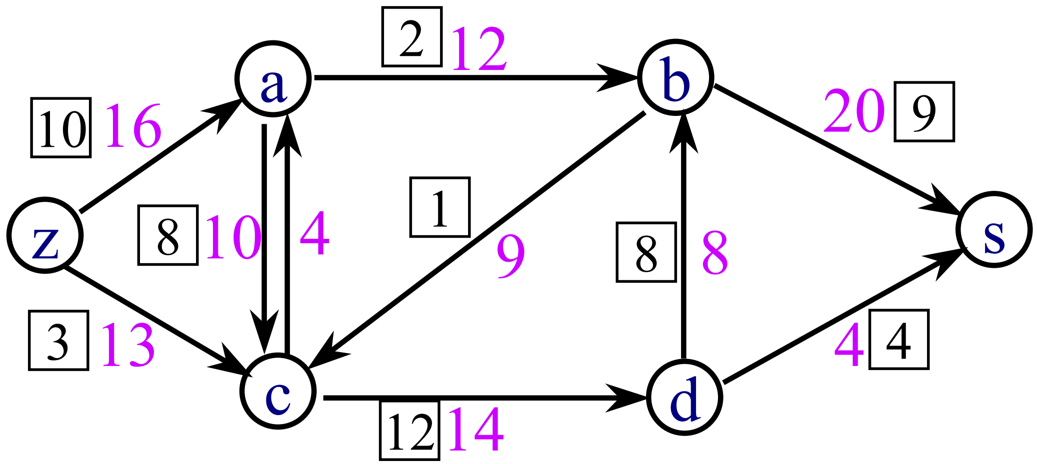
- Tok f v sítí S =(G,c,z,s) je zobrazení $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ splňující
  - ① $f(u,v) \leq c(u,v)$ pro každé $u,v \in V$
  - ② $f(u,v) = -f(v,u)$ pro každé $u,v \in V$
  - ③ $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$ pro každé $u \in V \setminus \{z,s\}$

Tok v síti



- Tok f v sítí S =(G,c,z,s) je zobrazení f:V×V→ **R** splňující
  ① f(u,v) ≤ c(u,v) pro každé u,v ∈V
  ② f(u,v) = –f(v,u) pro každé u,v ∈V
  ③ $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$ pro každé u ∈V \ {z,s}

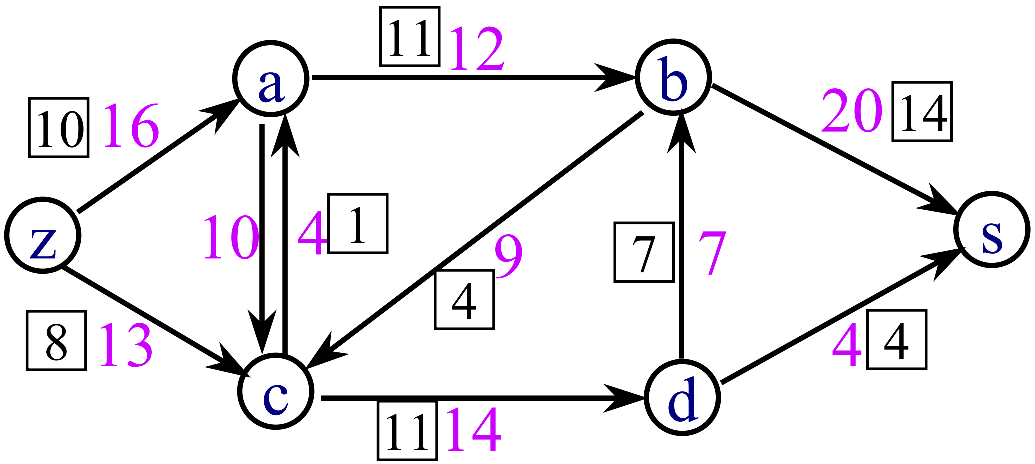
Velikost toku



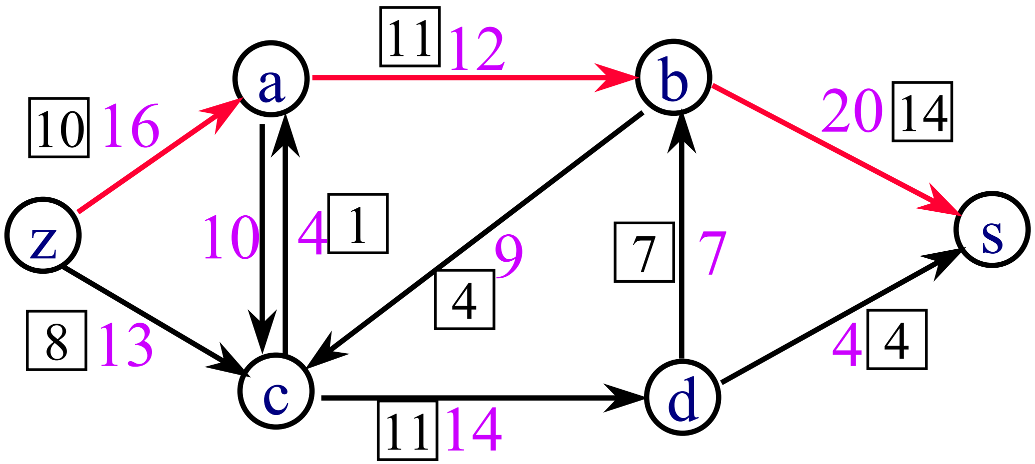
- $|\mathrm{f}| = \sum_{v \in V} \mathrm{f}(z, v)$ velikost toku

- Problém: Nalézt v dané síti tok o maximální velikosti.

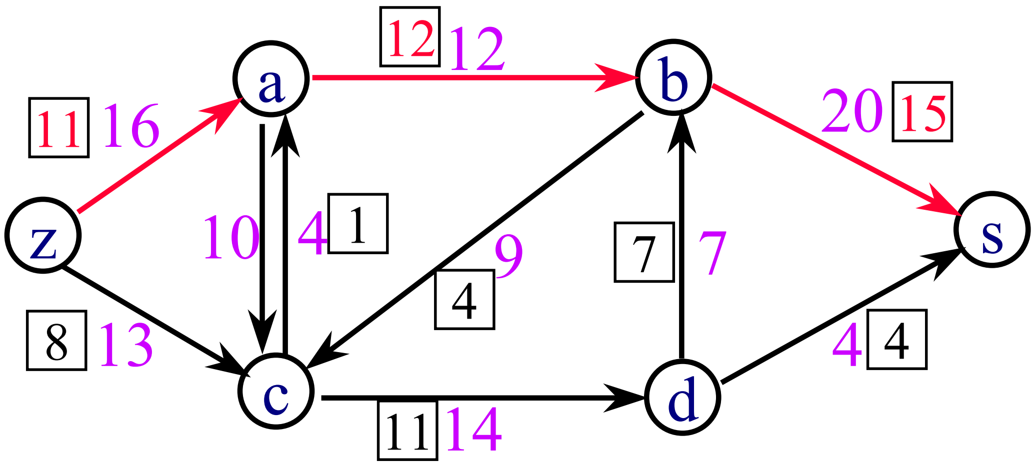
Ford-Fulkersonova metoda



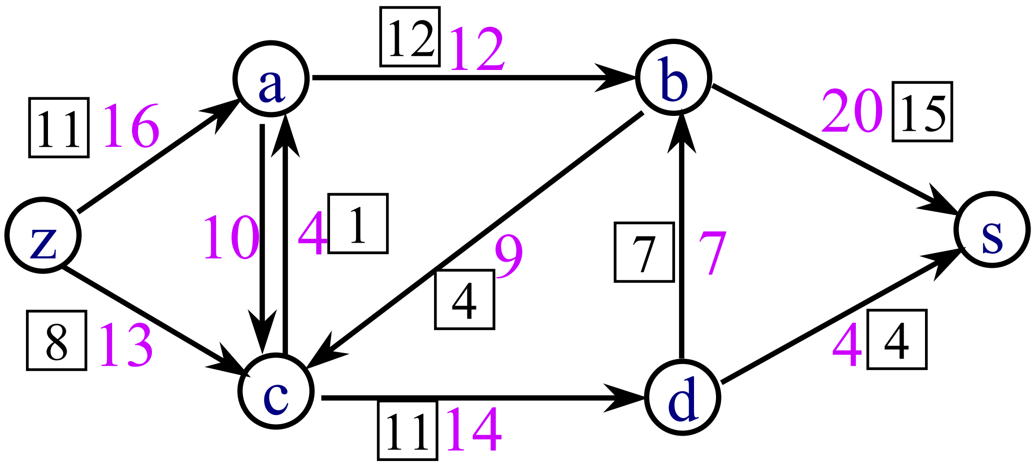
Ford-Fulkersonova metoda



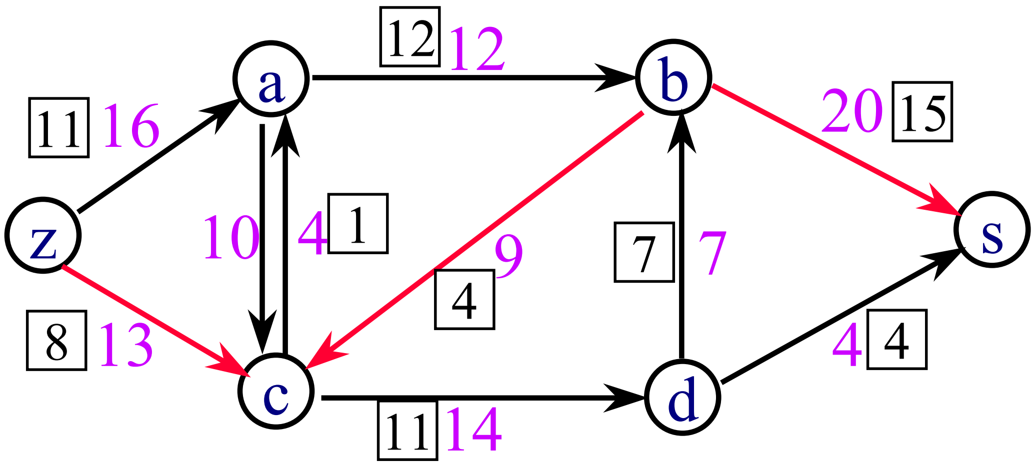
Ford-Fulkersonova metoda



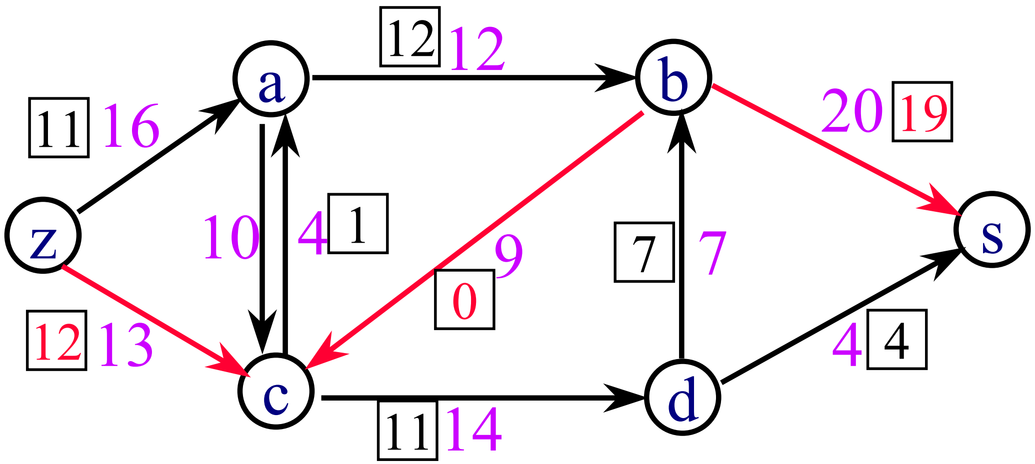
Ford-Fulkersonova metoda



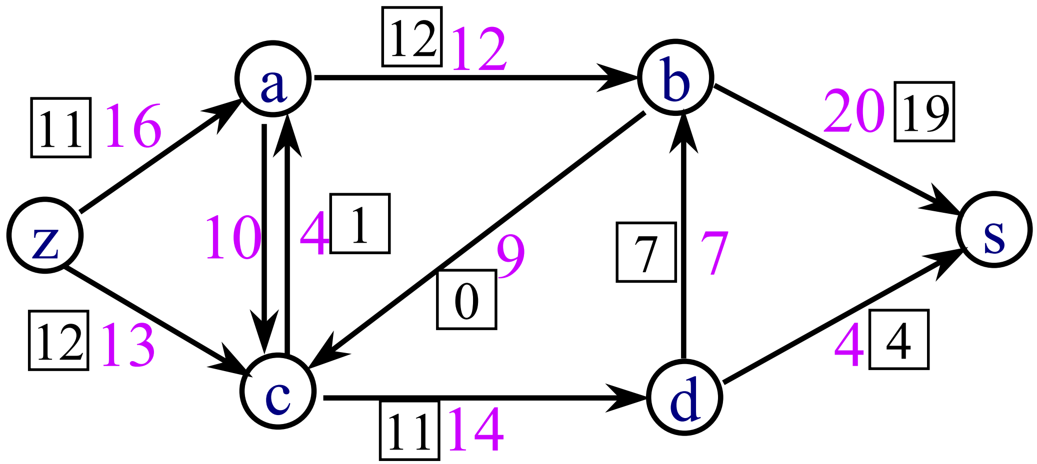
Ford-Fulkersonova metoda



Ford-Fulkersonova metoda



Ford-Fulkersonova metoda



- L.R.Ford,D.R.Fulkerson (1962)
- inicializuj tok f na 0
  while existuje zlepšitelná cesta P
  do zlepši f na hranách cesty P **od**
  return f .

Reziduální síť

- reziduální kapacita $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$
- reziduální síť S_f příslušná síti S a toku f je $S_f=(G_f, c_f, z, s)$, $G_f=(V,E_f)$ $E_f=\{(u,v) \in V\times V \mid c_f(u,v)>0\}$
- reziduální kapacita cesty P je $c_f(P) = \min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in P\}$
- Ford-Fulkerson(G,z,s)

for all $(u,v) \in E(G)$ **do** $f(u,v):=0$; $f(v,u):=0$ **od**

while $\exists$ cesta P ze zdroje *z* do *s* v S_f

do $c_f(P) = \min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in P\}$

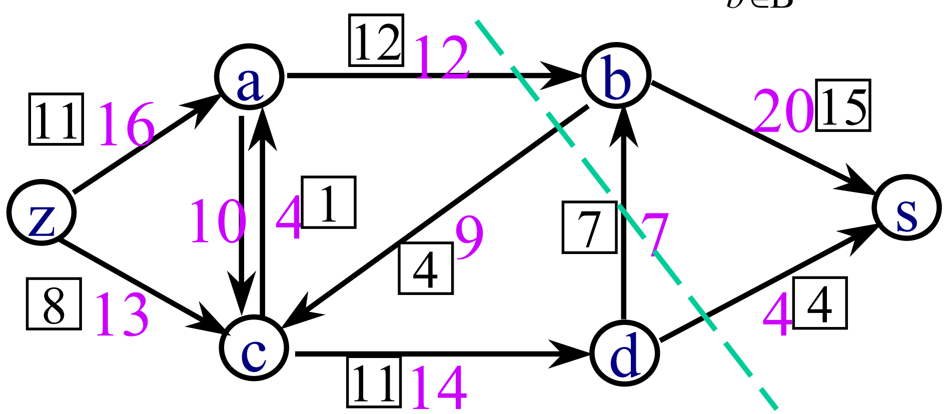
  for all $(u,v)\in P$ **do** $f(u,v):=f(u,v)+c_f(P)$

  $f(v,u):= -f(u,v)$ **od**

od .

Řez v síti

- Řez (A,B) v síti S = (G,c,z,s) je rozklad množiny V(G) na A a B takový, že z∈A, s∈B.
- Kapacita řezu (A,B) je $\mathrm{c}(A,B) = \sum_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \mathrm{c}(a,b)$
- Tok podél řezu (A,B) je $\mathrm{f}(A,B) = \sum_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \mathrm{f}(a,b)$



Ford-Fulkersonova věta

- **Lemma:** Buď f tok a (A,B) řez v síti S. Pak platí
  ① $f(A,B) = |f|$
  ② $|f| \leq c(A,B)$.

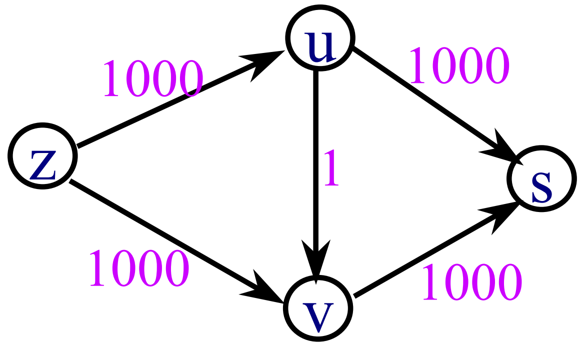
- **Věta (Ford, Fulkerson):** Buď f tok v síti S. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:
  ① f je maximální tok v S
  ② reziduální síť S_f neobsahuje žádnou cestu ze zdroje do spotřebiče
  ③ existuje řez (A,B) v S tak, že $|f| = c(A,B)$.

Důsledky Ford-Fulkersonovy věty

- Důsledek: V každé síti je velikost maximálního toku rovna kapacitě minimálního řezu.
- Věta (o celočíselnosti): V síti s celočíselnými kapacitami hran existuje maximální tok, který každé hraně přiřazuje celé číslo. Tento tok lze nalézt Ford-Fulkersonovým algoritmem.
- Věta (konečnost algoritmu): Jsou-li kapacity hran sítě S racionální čísla, pak Ford-Fulkersonův algoritmus končí.

Efektivita algoritmu

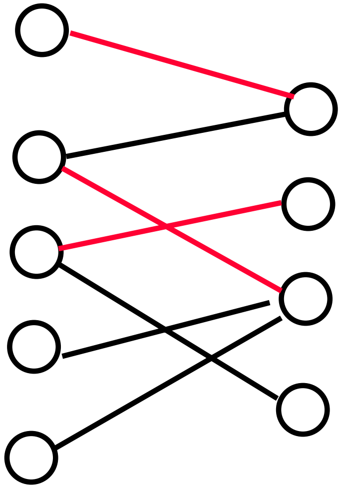
- Časová složitost Ford-Fulkersonova algoritmu: $O(|f^*| \cdot m)$



- Jak hledat cestu ze zdroje do spotřebiče v reziduální síti?
  ☞ prohledáváním do šířky, $O(n \cdot m^2)$, Edmonds, Karp (1972)
- Dinic (1970) $O(n^2 \cdot m)$
- Karzanov(1974),Malhotra,Pramodh Kumar,Maheshwari(1978) $O(n^3)$
- Goldberg, Tarjan (1986) čas $O(n \cdot m \cdot \log(n^2/m))$
- Goldberg, Rao (1998) čas $O(\min\{n^{2/3}, m^{1/2}\} \cdot m \cdot \log(n^2/m) \cdot \log c)$
  c = max. kapacita

Aplikace : Určení maximálního párování v bipartitním grafu

- Množina hran $M \subseteq E(G)$ grafu G tvoří párování, pokud $e_1, e_2 \in M \;\Rightarrow\; e_1 \cap e_2 = \emptyset$.
- Maximální párování je párování s maximálním počtem hran.



- Hopcroft, Karp (1973) $O(m\sqrt{n})$

Určení vrcholové a hranové souvislosti grafu

- Vrcholová (hranová souvislost) grafu G je minimální počet vrcholů (hran) grafu, po jejichž odstranění se graf rozpadne na více komponent.
- Even, Hopcroft, (Even, Tarjan) (1975) $O(m^2 \sqrt{n})$

Určení maximálního toku minimální ceny

- Každé orientované hraně *h* sítě S=(G,c,z,s) je přiřazena její cena *w(h)*. Cenou toku f v síti S nazveme součet w(*h*)f(*h*) přes všechny hrany h sítě S. Mezi všemi toky maximální velikosti hledáme ten, který má minimální cenu.
- Definujme ceny w_f hran reziduální sítě S_f příslušné síti S a toku f takto:
  Pokud $(x,y)\in E(G)$ a $c(x,y)>f(x,y)$, položíme $w_f(x,y)=w(x,y)$,
  je-li $(y,x)\in E(G)$ a $f(y,x)>0$, položíme $w_f(x,y)=-w(y,x)$.
- Věta: Cenu toku lze při zachování jeho velikosti snížit právě tehdy, když v reziduální síti existuje cyklus záporné ceny.

Určení maximálního párování minimální ceny v bipartitním grafu

- Každé hraně bipartitního grafu G je přiřazena její cena. Mezi všemi maximálními párováními v G hledáme to, které má minimální cenu. Cena párování je součet cen jeho hran.

Dopravní problém (F.L.Hitchcock, 1941)

- m dodavatelů, i-tý disponuje množstvím a_i zboží.
- n spotřebitelů, j-tý spotřebitel požaduje b_j zboží.
- doprava jednotkového množství zboží od i-tého dodavatele k j-tému spotřebiteli stojí částku c_{ij} .
- nabídka kryje poptávku (lze vynechat)
- Problém: nalézt takový způsob přepravy zboží od dodavatelů ke spotřebitelům, aby všechny požadavky spotřebitelů byly splněny, a celkové náklady na dopravu byly minimální.