Paralelné algoritmy, časť č. 9
Optimálne paralelné triedenie

František Mráz

Kabinet software a výuky informatiky, MFF UK, Praha

Paralelné algoritmy, 2011/2012

Obsah

Optimálne paralelné triedenie

Cole

paralelný mergesort pomocou *dobrých vzorkovacích postupností*

Optimálne paralelné triedenie

Cole

paralelný mergesort pomocou *dobrých vzorkovacích postupností*

Definícia

Optimálne paralelné triedenie

Cole

paralelný mergesort pomocou *dobrých vzorkovacích postupností*

Definícia

- *Prvok c je medzi prvkami a a $b \equiv_{df} a < c \leq b$.*

Optimálne paralelné triedenie

Cole

paralelný mergesort pomocou *dobrých vzorkovacích postupností*

Definícia

- *Prvok* c *je medzi prvkami* a *a* $b \equiv_{df} a < c \leq b$.
- *Nech* e *je prvok a* L *je množina.* $\mathrm{hodnosť}(e, L) =$ *počet prvkov z* L *menších než* e

Optimálne paralelné triedenie

Cole

paralelný mergesort pomocou *dobrých vzorkovacích postupností*

Definícia

- *Prvok* c *je medzi prvkami* a a $b \equiv_{df} a < c \leq b$.
- *Nech* e *je prvok a* L *je množina.* $\text{hodnosť}(e, L) =$ *počet prvkov z* L *menších než* e
- *definujeme funkciu* $R[A, B] : A \to \mathbb{N}$ *tak, že* $R[A, B] := \text{hodnosť}(e, B)$ *– reprezentujeme poľom dĺžky* $|A|$ *tak, že* $R[A, B][i] = \text{hodnosť}(A[i], B)$

Optimálne paralelné triedenie

Cole

paralelný mergesort pomocou *dobrých vzorkovacích postupností*

Definícia

- *Prvok* c *je medzi prvkami* a a $b \equiv_{df} a < c \leq b$.
- *Nech* e *je prvok a* L *je množina.* $\text{hodnosť}(e, L) =$ *počet prvkov z* L *menších než* e
- *definujeme funkciu* $R[A, B] : A \to \mathbb{N}$ *tak, že* $R[A, B] := \text{hodnosť}(e, B)$ – *reprezentujeme poľom dĺžky* $|A|$ *tak, že* $R[A, B][i] = \text{hodnosť}(A[i], B)$
- *Utriedená postupnosť* L *sa nazýva dobrá vzorkovacia postupnosť* (dvp) *pre postupnosť* $J \equiv_{df}$ *medzi ľubovoľnými* $k + 1$ *po sebe idúcimi prvkami z* $\{-\infty\} \cup L \cup \{\infty\}$ *je maximálne* $2k + 1$ *prvkov z* J

Optimálne paralelné triedenie

Cole

paralelný mergesort pomocou *dobrých vzorkovacích postupností*

Definícia

- *Prvok* c *je medzi prvkami* a *a* $b \equiv_{df} a < c \leq b$.
- *Nech* e *je prvok a* L *je množina.* $\text{hodnosť}(e, L) =$ *počet prvkov z* L *menších než* e
- *definujeme funkciu* $R[A, B] : A \to \mathbb{N}$ *tak, že* $R[A, B] := \text{hodnosť}(e, B)$ – *reprezentujeme poľom dĺžky* $|A|$ *tak, že* $R[A, B][i] = \text{hodnosť}(A[i], B)$
- *Utriedená postupnosť* L *sa nazýva dobrá vzorkovacia postupnosť (*dvp*) pre postupnosť* $J \equiv_{df}$ *medzi ľubovoľnými* $k + 1$ *po sebe idúcimi prvkami z* $\{-\infty\} \cup L \cup \{\infty\}$ *je maximálne* $2k + 1$ *prvkov z* J

- Príklad: S utriedená postupnosť, S_1 je postupnosť obsahujúca každý druhý prvok z $S \Rightarrow S_1$ dvp S.

Mergewithhelp

function *mergewithhelp*(J, K, L)
$\{$ L je dvp pre obidve utriedené postupnosti J a K $\}$
begin
rozdeľ J na $J(1)$, $J(2)$, $\ldots$, kde $J(i)$ je množina prvkov
ležiacich medzi $(i-1)$-vym a i-tym prvkom postupnosti L
analogicky K na $K(1)$, $K(2)$, $\ldots$, kde ...podľa L
for all $i, 1 \leq i \leq |L| + 1$ **in parallel do** $res_i := merge(J(i), K(i))$
$mergewithhelp := res_1 res_2 \ldots res_{|L|+1}$
end

Vlastnosti dvp

Ozn. & označuje operáciu zlievania (merge)

Lemma

$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y'$ *utriedené postupnosti.*

Potom

$$X\&Y \text{ dvp } X' \textit{ a } X\&Y \text{ dvp } Y' \quad .$$

- Pozor: $X\&Y$ nemusí byť dvp $X'\&Y'$!

  $X = [2,7] \quad X' = [2,5,6,7] \quad X\&Y = [1,2,7,8]$
  $Y = [1,8] \quad Y' = [1,3,4,8] \quad X'\&Y' = [1,2,3,4,5,6,7,8]$

Vlastnosti dvp

Ozn. & označuje operáciu zlievania (merge)

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \textit{ utriedené postupnosti.}$$

Potom

$$X\&Y \text{ dvp } X' \textit{ a } X\&Y \text{ dvp } Y' \quad .$$

- Pozor: $X\&Y$ nemusí byť dvp $X'\&Y'$!

$$\begin{array}{lll} X = [2,7] & X' = [2,5,6,7] & X\&Y = [1,2,7,8] \\ Y = [1,8] & Y' = [1,3,4,8] & X'\&Y' = [1,2,3,4,5,6,7,8] \end{array}$$

- $\textit{redukcia}(X) =_{df}$ postupnosť obsahujúca každý štvrtý prvok z X

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \text{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r po sebe idúcimi prvkami z $X\&Y$ je maximálne $2r + 2$ prvkov z $X'\&Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \text{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r po sebe idúcimi prvkami z $X\&Y$ je maximálne $2r+2$ prvkov z $X'\&Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$
- nech $e_1, e_2, \ldots, e_r$ je r po sebe idúcich čísel z $X\&Y$ – h prvkov z X a j prvkov z Y.

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \text{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r po sebe idúcimi prvkami z $X\&Y$ je maximálne $2r + 2$ prvkov z $X'\&Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$
- nech $e_1, e_2, \ldots, e_r$ je r po sebe idúcich čísel z $X\&Y$ – h prvkov z X a j prvkov z Y.
- BUNO $e_1 \in X$

Vlastnosti dvp

Lemma

$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y'$ *utriedené postupnosti.*

Potom medzi lubovoľnými r *po sebe idúcimi prvkami z* $X \& Y$ *je maximálne* $2r + 2$ *prvkov z* $X' \& Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$
- nech $e_1, e_2, \ldots, e_r$ je r po sebe idúcich čísel z $X \& Y$ – h prvkov z X a j prvkov z Y.
- BUNO $e_1 \in X$

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} \; X, Y, X', Y' \textit{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r po sebe idúcimi prvkami z $X\&Y$ je maximálne $2r + 2$ prvkov z $X'\&Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$
- nech $e_1, e_2, \ldots, e_r$ je r po sebe idúcich čísel z $X\&Y$ – h prvkov z X a j prvkov z Y.
- BUNO $e_1 \in X$
- a) $e_r \in X$:
  medzi e_1 a e_r je maximálne $2(h-1)+1$ prvkov z X'
  medzi e_1 a e_r je maximálne $2(j+1)+1$ prvkov z Y' ($e_1, \ldots, e_r$ ležia medzi $j+2$ po sebe idúcimi prvkami z Y)
  Celkovo: $2(h-1)+1+2(j+1)+1 = 2(h+j)+2 = 2r+2$

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \textit{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r *po sebe idúcimi prvkami z* $X\&Y$ *je maximálne* $2r+2$ *prvkov z* $X'\&Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \textit{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r po sebe idúcimi prvkami z $X\&Y$ je maximálne $2r+2$ prvkov z $X'\&Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$
- nech $e_1, e_2, \dots, e_r$ je r po sebe idúcich čísel z $X\&Y$ – h prvkov z X a j prvkov z Y.

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \text{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r po sebe idúcimi prvkami z $X \& Y$ je maximálne $2r + 2$ prvkov z $X' \& Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$
- nech $e_1, e_2, \ldots, e_r$ je r po sebe idúcich čísel z $X \& Y$ – h prvkov z X a j prvkov z Y.
- BUNO $e_1 \in X$

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \textit{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r po sebe idúcimi prvkami z $X\&Y$ je maximálne $2r + 2$ prvkov z $X'\&Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$
- nech $e_1, e_2, \ldots, e_r$ je r po sebe idúcich čísel z $X\&Y$ – h prvkov z X a j prvkov z Y.
- BUNO $e_1 \in X$

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \textit{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r po sebe idúcimi prvkami z $X \& Y$ je maximálne $2r + 2$ prvkov z $X' \& Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$
- nech $e_1, e_2, \ldots, e_r$ je r po sebe idúcich čísel z $X \& Y$ – h prvkov z X a j prvkov z Y.
- BUNO $e_1 \in X$
- b) $e_r \in Y$:
  medzi e_1 a e_r je maximálne $2h + 1$ prvkov z X'
  medzi e_1 a e_r je maximálne $2j + 1$ prvkov z Y'
  Celkovo: $2r + 2$

Vlastnosti dvp

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \textit{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r po sebe idúcimi prvkami z $X \& Y$ je maximálne $2r + 2$ prvkov z $X' \& Y'$.

Dôkaz:

- môžeme predpokladať, že X, Y obsahujú $-\infty, +\infty$
- nech $e_1, e_2, \ldots, e_r$ je r po sebe idúcich čísel z $X \& Y$ – h prvkov z X a j prvkov z Y.
- BUNO $e_1 \in X$
- b) $e_r \in Y$:
  medzi e_1 a e_r je maximálne $2h + 1$ prvkov z X'
  medzi e_1 a e_r je maximálne $2j + 1$ prvkov z Y'
  Celkovo: $2r + 2$

Redukcia a zlievanie

Lemma

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\} X, Y, X', Y' \textit{ utriedené postupnosti.}$$

Potom medzi lubovoľnými r *po sebe idúcimi prvkami z* $X \& Y$ *je maximálne* $2r + 2$ *prvkov z* $X' \& Y'$.

Použitie:

- Nech $Z = redukcia(X \& Y)$ a $Z' = redukcia(X' \& Y')$

Redukcia a zlievanie

Lemma

$\left.\begin{array}{l} X \text{ dvp } X' \\ Y \text{ dvp } Y' \end{array}\right\}$ X, Y, X', Y' *utriedené postupnosti.*

Potom medzi lubovoľnými r *po sebe idúcimi prvkami z* $X\&Y$ *je maximálne* $2r+2$ *prvkov z* $X'\&Y'$.

Použitie:

- Nech $Z = \mathit{redukcia}(X\&Y)$ a $Z' = \mathit{redukcia}(X'\&Y')$
- $e_1, \ldots, e_{k+1}$ po sebe idúce prvky zo Z
  medzi nimi je maximálne $4k+1$ prvkov $X\&Y$ (vrátane e_1 a e_{k+1})
  medzi týmito $4k+1$ prvkami leží maximálne $8k+4$ prvkov z $X'\&Y'$, teda po redukcii maximálne $(8k+4)\cdot\frac{1}{4} = 2k+1$ prvkov zo Z'
  $\Rightarrow Z$ dvp Z'.

Schéma algoritmu triedenia

- predpokladáme počet vst. prvkov rovný mocnine 2
  binárny strom – uzly budú obsahovať utriedené postupnosti prvkov

Schéma algoritmu triedenia

- predpokladáme počet vst. prvkov rovný mocnine 2
  binárny strom – uzly budú obsahovať utriedené postupnosti prvkov
- **Inicializácia:** i-ty list obsahuje i-ty vstup, vnútorné uzly obsahujú prázdne zoznamy

Schéma algoritmu triedenia

- predpokladáme počet vst. prvkov rovný mocnine 2
  binárny strom – uzly budú obsahovať utriedené postupnosti prvkov
- **Inicializácia:** i-ty list obsahuje i-ty vstup, vnútorné uzly obsahujú prázdne zoznamy
- **Výpočet:**
  val_v postupnosť uložená v uzle v
  T_v podstrom s koreňom v
  $list_v$ zoznam prvkov v listoch stromu T_v

Schéma algoritmu triedenia

- predpokladáme počet vst. prvkov rovný mocnine 2
  binárny strom – uzly budú obsahovať utriedené postupnosti prvkov
- **Inicializácia:** i-ty list obsahuje i-ty vstup, vnútorné uzly obsahujú prázdne zoznamy
- **Výpočet:**
  val_v postupnosť uložená v uzle v
  T_v podstrom s koreňom v
  $list_v$ zoznam prvkov v listoch stromu T_v
- úloha uzlu v: utriediť postupnosť $list_v$
  val_v bude vždy podpostupnosť postupnosti $list_v$
  vrchol v je $\begin{cases} \text{úplný} & \text{ak } |val_v| = |list_v| \\ \text{neúplný} & \text{inak} \end{cases}$

Priebeh výpočtu v uzle v

- v dostáva dva prúdy utriedených postupností

$$\left.\begin{array}{ll} X_1, X_2, \ldots, X_r & \text{z ľavého syna} \\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_r & \text{z ľavého syna} \end{array}\right. \quad \text{vždy } X_i \text{ a } Y_i \text{ zároveň.}$$

Priebeh výpočtu v uzle v

- v dostáva dva prúdy utriedených postupností
  $X_1, X_2, \ldots, X_r$ z ľavého syna
  $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ z ľavého syna
  vždy X_i a Y_i zároveň.
- následne počíta prúd utriedených postupností

$$(val_v)_i := mergewithhelp(X_i, Y_i, (val_v)_{i-1})$$

a vysiela výstupný prúd utriedených postupností $Z_1, \ldots, Z_{r+1}$

Priebeh výpočtu v uzle v

- v dostáva dva prúdy utriedených postupností

  $X_1, X_2, \ldots, X_r$ z ľavého syna
  $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ z ľavého syna
  vždy X_i a Y_i zároveň.

- následne počíta prúd utriedených postupností

$$(val_v)_i := mergewithhelp(X_i, Y_i, (val_v)_{i-1})$$

  a vysiela výstupný prúd utriedených postupností $Z_1, \ldots, Z_{r+1}$

- vo všetkých prúdoch je dĺžka nasledujúcej postupnosti dvojnásobná oproti predchádzajúcej

Priebeh výpočtu v uzle v

- v dostáva dva prúdy utriedených postupností
  $X_1, X_2, \ldots, X_r$ z ľavého syna
  $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ z ľavého syna
  vždy X_i a Y_i zároveň.
- následne počíta prúd utriedených postupností

$$(val_v)_i := mergewithhelp(X_i, Y_i, (val_v)_{i-1})$$

  a vysiela výstupný prúd utriedených postupností $Z_1, \ldots, Z_{r+1}$
- vo všetkých prúdoch je dĺžka nasledujúcej postupnosti dvojnásobná oproti predchádzajúcej
- ak je v neúplný, tak otcovi posiela $redukcia(val_v)$
  ak je v úplný, tak pošle najprv každý druhý prvok a potom všetky prvky a prestane pracovať.

Počet procesorov

- procesory "putujú" spolu s triedenými prvkami

Počet procesorov

- procesory "putujú" spolu s triedenými prvkami
- nech vrcholy do výšky v_1 dopočítali

Počet procesorov

- procesory "putujú" spolu s triedenými prvkami
- nech vrcholy do výšky v_1 dopočítali
- okrem úplnej úrovne je vždy v nasledujúcej vyššej vrstve v uzle postupnosť maximálne polovičnej dĺžky než v nižšej vrstve

Počet procesorov

- procesory "putujú" spolu s triedenými prvkami
- nech vrcholy do výšky v_1 dopočítali
- okrem úplnej úrovne je vždy v nasledujúcej vyššej vrstve v uzle postupnosť maximálne polovičnej dĺžky než v nižšej vrstve
- počet vrcholov vo výške h je $2^{\log n-h}$, dĺžka $|val_v|$ vo výške h je 2^{2v_1-h}

Počet procesorov

- procesory "putujú" spolu s triedenými prvkami
- nech vrcholy do výšky v_1 dopočítali
- okrem úplnej úrovne je vždy v nasledujúcej vyššej vrstve v uzle postupnosť maximálne polovičnej dĺžky než v nižšej vrstve
- počet vrcholov vo výške h je $2^{\log n-h}$, dĺžka $|val_v|$ vo výške h je 2^{2v_1-h}
- počet procesorov v aktívnych vrcholoch stromu je maximálne

$$\sum_{h=v_1}^{2v_1} 2^{\log n-h}\cdot 2^{2v_1-h} \leq 2^{\log n+2v_1}\sum_{h=v_1}^{2v_1} 2^{-2h} = n2^{2v_1}\sum_{h=0}^{v_1} 2^{-2(h+v_1)} =$$

$$= n2^{2v_1-2v_1}\sum_{h=0}^{v_1} 2^{-2h} \leq n\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = n\frac{4}{3}$$

plus úplná vrstva = $O(n)$

Počet procesorov

- procesory "putujú" spolu s triedenými prvkami
- nech vrcholy do výšky v_1 dopočítali
- okrem úplnej úrovne je vždy v nasledujúcej vyššej vrstve v uzle postupnosť maximálne polovičnej dĺžky než v nižšej vrstve
- počet vrcholov vo výške h je $2^{\log n - h}$, dĺžka $|val_v|$ vo výške h je $2^{2v_1 - h}$
- počet procesorov v aktívnych vrcholoch stromu je maximálne

$$\sum_{h=v_1}^{2v_1} 2^{\log n - h} \cdot 2^{2v_1 - h} \leq 2^{\log n + 2v_1} \sum_{h=v_1}^{2v_1} 2^{-2h} = n 2^{2v_1} \sum_{h=0}^{v_1} 2^{-2(h+v_1)} =$$

$$= n 2^{2v_1 - 2v_1} \sum_{h=0}^{v_1} 2^{-2h} \leq n \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = n \frac{4}{3}$$

  plus úplná vrstva = $O(n)$
- celkovo čas $O(\log n)$ s n procesormi

Invarianty

- **Hlavný invariant:**

Invarianty

- **Hlavný invariant:**
  - $\forall i$ ak X_i dvp X_{i+1} a Y_i dvp Y_{i+1} potom Z_i dvp Z_{i+1};

Invarianty

- **Hlavný invariant:**
  - $\forall i$ ak X_i dvp X_{i+1} a Y_i dvp Y_{i+1} potom Z_i dvp Z_{i+1};
  - $|X_i| = |Y_i| = |Z_i| = \frac{|X_{i+1}|}{2} = \frac{|Y_{i+1}|}{2} = \frac{|Z_{i+1}|}{2}$

Invarianty

- **Hlavný invariant:**
  - $\forall i$ ak X_i dvp X_{i+1} a Y_i dvp Y_{i+1} potom Z_i dvp Z_{i+1};
  - $|X_i| = |Y_i| = |Z_i| = \frac{|X_{i+1}|}{2} = \frac{|Y_{i+1}|}{2} = \frac{|Z_{i+1}|}{2}$
  - indukciou
    špeciálne sa ošetrí Z_r a Z_{r+1} (nejde pomocou lemmy o redukciách), ale

Invarianty

- **Hlavný invariant:**
  - $\forall i$ ak X_i dvp X_{i+1} a Y_i dvp Y_{i+1} potom Z_i dvp Z_{i+1};
  - $|X_i| = |Y_i| = |Z_i| = \frac{|X_{i+1}|}{2} = \frac{|Y_{i+1}|}{2} = \frac{|Z_{i+1}|}{2}$
  - indukciou
    špeciálne sa ošetrí Z_r a Z_{r+1} (nejde pomocou lemmy o redukciách), ale
    - Z_{r-1} je každý druhý zo Z_r, teda Z_{r-1} dvp Z_r

Invarianty

- **Hlavný invariant:**
  - $\forall i$ ak X_i dvp X_{i+1} a Y_i dvp Y_{i+1} potom Z_i dvp Z_{i+1};
  - $|X_i| = |Y_i| = |Z_i| = \frac{|X_{i+1}|}{2} = \frac{|Y_{i+1}|}{2} = \frac{|Z_{i+1}|}{2}$
  - indukciou
    špeciálne sa ošetrí Z_r a Z_{r+1} (nejde pomocou lemmy o redukciách), ale
    - Z_{r-1} je každý druhý zo Z_r, teda Z_{r-1} dvp Z_r
    - Z_r je každý druhý zo Z_{r+1}, teda Z_r dvp Z_{r+1}

Invarianty

- **Hlavný invariant:**
  - $\forall i$ ak X_i dvp X_{i+1} a Y_i dvp Y_{i+1} potom Z_i dvp Z_{i+1};
  - $|X_i| = |Y_i| = |Z_i| = \frac{|X_{i+1}|}{2} = \frac{|Y_{i+1}|}{2} = \frac{|Z_{i+1}|}{2}$
  - indukciou
    špeciálne sa ošetrí Z_r a Z_{r+1} (nejde pomocou lemmy o redukciách), ale
    - Z_{r-1} je každý druhý zo Z_r, teda Z_{r-1} dvp Z_r
    - Z_r je každý druhý zo Z_{r+1}, teda Z_r dvp Z_{r+1}
- ak X ukončí prúd v čase t, tak jeho otec skončí v čase $t + 3 \quad \Rightarrow \quad$ celkový počet štádií je $3 \log n$

Invarianty

- **Hlavný invariant:**
  - $\forall i$ ak X_i dvp X_{i+1} a Y_i dvp Y_{i+1} potom Z_i dvp Z_{i+1};
  - $|X_i| = |Y_i| = |Z_i| = \frac{|X_{i+1}|}{2} = \frac{|Y_{i+1}|}{2} = \frac{|Z_{i+1}|}{2}$
  - indukciou
    špeciálne sa ošetrí Z_r a Z_{r+1} (nejde pomocou lemmy o redukciách), ale
    - Z_{r-1} je každý druhý zo Z_r, teda Z_{r-1} dvp Z_r
    - Z_r je každý druhý zo Z_{r+1}, teda Z_r dvp Z_{r+1}
- ak X ukončí prúd v čase t, tak jeho otec skončí v čase $t+3 \quad \Rightarrow \quad$ celkový počet štádií je $3 \log n$
- **Pomocný invariant:**

Invarianty

- **Hlavný invariant:**
  - $\forall i$ ak X_i dvp X_{i+1} a Y_i dvp Y_{i+1} potom Z_i dvp Z_{i+1};
  - $|X_i| = |Y_i| = |Z_i| = \frac{|X_{i+1}|}{2} = \frac{|Y_{i+1}|}{2} = \frac{|Z_{i+1}|}{2}$
  - indukciou
    špeciálne sa ošetrí Z_r a Z_{r+1} (nejde pomocou lemmy o redukciách), ale
    - Z_{r-1} je každý druhý zo Z_r, teda Z_{r-1} dvp Z_r
    - Z_r je každý druhý zo Z_{r+1}, teda Z_r dvp Z_{r+1}
- ak X ukončí prúd v čase t, tak jeho otec skončí v čase $t+3 \quad \Rightarrow \quad$ celkový počet štádií je $3 \log n$
- **Pomocný invariant:**
  - Ak $[S_1, \ldots, S_p]$ je prúd vstupujúci alebo vystupujúci z nejakého uzlu, tak poznáme aj prúd krížových odkazov $R[S_{i+1}, S_i]$

Invarianty

- **Hlavný invariant:**
  - $\forall i$ ak X_i dvp X_{i+1} a Y_i dvp Y_{i+1} potom Z_i dvp Z_{i+1};
  - $|X_i| = |Y_i| = |Z_i| = \frac{|X_{i+1}|}{2} = \frac{|Y_{i+1}|}{2} = \frac{|Z_{i+1}|}{2}$
  - indukciou
    špeciálne sa ošetrí Z_r a Z_{r+1} (nejde pomocou lemmy o redukciách), ale
    - Z_{r-1} je každý druhý zo Z_r, teda Z_{r-1} dvp Z_r
    - Z_r je každý druhý zo Z_{r+1}, teda Z_r dvp Z_{r+1}
- ak X ukončí prúd v čase t, tak jeho otec skončí v čase $t+3 \quad \Rightarrow \quad$ celkový počet štádií je $3 \log n$
- **Pomocný invariant:**
  - Ak $[S_1, \ldots, S_p]$ je prúd vstupujúci alebo vystupujúci z nejakého uzlu, tak poznáme aj prúd krížových odkazov $R[S_{i+1}, S_i]$
- Pozn.: pre každdú postupnosť S poznáme $R[S, S]$

Hodnosť prvku v postupnosti dĺžky k pomocou k procesorov

Lemma

Nech $S = [b_1, \ldots, b_k]$ je utriedená postupnosť. Potom hodnosť ľubovoľného prvku a v S sa dá spočítať v konštantnom čase pomocou $O(k)$ procesorov na CREW PRAMe.

Dôkaz: nech $b_0 = -\infty, \quad b_{k+1} = +\infty$
for all $0 \leq i \leq k$ in parallel do
  if $b_i < a \leq b_{i+1}$ then $\text{hodnosť}(a, S) := i$

Lemma

Nech S_1, S_2 a $S = S_1 \& S_2$ sú utriedené postupnosti, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Potom $R[S_1, S_2]$ a $R[S_2, S_1]$ sa dá spočítať v čase $O(1)$ pomocou $O(|S|)$ procesorov na CREW PRAM.

Hodnosť prvku v postupnosti dĺžky k pomocou k procesorov

Lemma

Nech $S = [b_1, \ldots, b_k]$ je utriedená postupnosť. Potom hodnosť ľubovoľného prvku a v S sa dá spočítať v konštantnom čase pomocou $O(k)$ procesorov na CREW PRAMe.

Dôkaz: nech $b_0 = -\infty, \quad b_{k+1} = +\infty$
for all $0 \leq i \leq k$ in parallel do
if $b_i < a \leq b_{i+1}$ then $\text{hodnosť}(a, S) := i$

Lemma

Nech S_1, S_2 a $S = S_1 \& S_2$ sú utriedené postupnosti, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Potom $R[S_1, S_2]$ a $R[S_2, S_1]$ sa dá spočítať v čase $O(1)$ pomocou $O(|S|)$ procesorov na CREW PRAM.

Dôkaz: poznáme $R[S, S] \quad \Rightarrow$
$\text{hodnosť}(a, S_2) = \text{hodnosť}(a, S_1 \& S_2) - \text{hodnosť}(a, S_1]$

Hlavná technická lemma I

Lemma

Nech sú dané utriedené postupnosti $X, Y, U = X\&Y, X', Y', X$ dvp X', Y dvp Y'. Ak sú dané krížové odkazy $R[X', X]$, $R[Y', Y]$, tak môžeme spočítať krížové odkazy $R[X', U]$, $R[Y', U]$ v čase $O(1)$ pomocou $O(|X| + |Y|)$ procesorov na CREW PRAM.

Dôkaz: Výpočet $R[X', X\&Y]$ (výpočet $R[Y', X\&Y]$ analogicky), nech $X = [a_1, \ldots, a_k]$

a) X' rozdelíme na segmenty
   $X'(1)$ … prvky ležiace medzi $-\infty, a_1$
   $X'(2)$ … prvky ležiace medzi a_1, a_2
   …
   čas $O(1)$ s $O(|X|)$ procesorov (poznáme $R[X', X]$)

Hlavná technická lemma I

Lemma

Nech sú dané utriedené postupnosti $X, Y, U = X\&Y, X', Y', X$ dvp X', Y dvp Y'. Ak sú dané krížové odkazy $R[X', X]$, $R[Y', Y]$, tak môžeme spočítať krížové odkazy $R[X', U]$, $R[Y', U]$ v čase $O(1)$ pomocou $O(|X| + |Y|)$ procesorov na CREW PRAM.

Dôkaz: Výpočet $R[X', X\&Y]$

b) $U(i)$ prvky z Y, ktoré ležia medzi a_{i-1} a a_i v U
$\forall x \in X'$ spočítame hodnosť(x, U):

for all $i, 1 \leq i \leq k+1$ in parallel do
  for all $x \in X'(i)$ do
    begin spočítame hodnosť$(x, U(i))$ (prvá lemma o 2 slajdy dozadu)
      hodnosť$(x, U) :=$ $j +$ hodnosť$(x, U(i))$
      j je poradie a_i v U
    end

Pre každé i použijeme $|U(i)|$ procesorov, $|X'(i)| \leq 3$ pretože
X dvp X'
$\Rightarrow$ čas $O(1)$

Hlavná technická lemma II

Lemma

Nech sú dané utriedené postupnosti $X, Y, U = X\&Y, X', Y', X$ dvp X', Y dvp Y'. Ak sú dané krížové odkazy $R[X', X]$, $R[Y', Y]$, tak môžeme spočítať krížové odkazy $R[U, X']$, $R[U, Y']$ v čase $O(1)$ pomocou $O(|X| + |Y|)$ procesorov na CREW PRAM.

Dôkaz: Výpočet $R[X\&Y, X']$ ($R[X\&Y, Y']$ analogicky)

- najprv spočítame $R[X, X']$
  $R[X, X'](j) :=$ index max. prvku z $X'(j)$:

Hlavná technická lemma II

Lemma

Nech sú dané utriedené postupnosti $X, Y, U = X\&Y, X', Y', X$ dvp X', Y dvp Y'. *Ak sú dané krížové odkazy* $R[X', X]$, $R[Y', Y]$, *tak môžeme spočítať krížové odkazy* $R[U, X']$, $R[U, Y']$ *v čase* $O(1)$ *pomocou* $O(|X| + |Y|)$ *procesorov na CREW PRAM.*

Dôkaz: Výpočet $R[X\&Y, X']$ ($R[X\&Y, Y']$ analogicky)

- najprv spočítame $R[X, X']$
  $R[X, X'](j) :=$ index max. prvku z $X'(j)$:
  - o každom prvku z $X\&Y$ viem či pochádza z X alebo z Y

Hlavná technická lemma II

Lemma

Nech sú dané utriedené postupnosti $X, Y, U = X\&Y, X', Y', X$ dvp X', Y dvp Y'. *Ak sú dané krížové odkazy* $R[X', X]$, $R[Y', Y]$, *tak môžeme spočítať krížové odkazy* $R[U, X']$, $R[U, Y']$ *v čase* $O(1)$ *pomocou* $O(|X| + |Y|)$ *procesorov na CREW PRAM.*

Dôkaz: Výpočet $R[X\&Y, X']$ ($R[X\&Y, Y']$ analogicky)

- najprv spočítame $R[X, X']$
  $R[X, X'](j) :=$ index max. prvku z $X'(j)$:
  - o každom prvku z $X\&Y$ viem či pochádza z X alebo z Y
  - ak $a_j \in X_i$: $R[X\&Y, X'](a_j)$ spočítame z $R[X, X'](a_j)$

Hlavná technická lemma II

Lemma

Nech sú dané utriedené postupnosti $X, Y, U = X\&Y, X', Y', X$ dvp X', Y dvp Y'. Ak sú dané krížové odkazy $R[X', X]$, $R[Y', Y]$, tak môžeme spočítať krížové odkazy $R[U, X']$, $R[U, Y']$ v čase $O(1)$ pomocou $O(|X| + |Y|)$ procesorov na CREW PRAM.

Dôkaz: Výpočet $R[X\&Y, X']$ ($R[X\&Y, Y']$ analogicky)

- najprv spočítame $R[X, X']$
  $R[X, X'](j) :=$ index max. prvku z $X'(j)$:
  - o každom prvku z $X\&Y$ viem či pochádza z X alebo z Y
  - ak $a_j \in X_i$: $R[X\&Y, X'](a_j)$ spočítame z $R[X, X'](a_j)$
  - ak $a_j \in Y_i$: $R[X\&Y, X'](a_j)$ spočítame z $\text{hodnosť}(a_j, X)$ a $R[X, X']$
    $\text{hodnosť}(a_j, X) := \text{hodnosť}(a_j, X\&Y) - \text{hodnosť}(a_j, Y)$