

# Paralelné algoritmy, část č. 8

František Mráz

Kabinet software a výuky informatiky, MFF UK, Praha

Paralelné algoritmy, 2011/2012

- 1 Grafové algoritmy
  - Eulerove cykly pre obecné grafy

# Outline

- 1 Grafové algoritmy
  - Eulerove cykly pre obecné grafy

# “Zorientovanie” grafu

Vstup:  $G = (V, E)$  neorientovaný alebo orientovaný Eulerovský graf

# “Zorientovanie” grafu

Vstup:  $G = (V, E)$  neorientovaný alebo orientovaný Eulerovský graf

Výstup: Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami

# “Zorientovanie” grafu

**Vstup:**  $G = (V, E)$  neorientovaný alebo orientovaný Eulerovský graf

**Výstup:** Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami

**Predspracovanie pre neorientovaný graf**  $H = (V, E)$  –  
voľba orientácie hrán

# “Zorientovanie” grafu

Vstup:  $G = (V, E)$  neorientovaný alebo orientovaný Eulerovský graf

Výstup: Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami

**Predspracovanie pre neorientovaný graf  $H = (V, E)$**  – voľba orientácie hrán

hranu  $\{i, j\}$  nahradíme dvojicou orientovaných hrán  $(i, j)$  a  $(j, i)$ ; jednu z nich musíme “zahodiť”

# “Zorientovanie” grafu

Vstup:  $G = (V, E)$  neorientovaný alebo orientovaný Eulerovský graf

Výstup: Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami

**Predspracovanie pre neorientovaný graf  $H = (V, E)$**  – voľba orientácie hrán

hranu  $\{i, j\}$  nahradíme dvojicou orientovaných hrán  $(i, j)$  a  $(j, i)$ ; jednu z nich musíme “zahodiť”

reprezentácia: zoznam hrán  $EDGE$  v poli veľkosti  $2|E|$



# “Zorientovanie” grafu

Vstup:  $G = (V, E)$  neorientovaný alebo orientovaný Eulerovský graf

Výstup: Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami

**Predspracovanie pre neorientovaný graf  $H = (V, E)$**  – voľba orientácie hrán

hranu  $\{i, j\}$  nahradíme dvojicou orientovaných hrán  $(i, j)$  a  $(j, i)$ ; jednu z nich musíme “zahodiť”

reprezentácia: zoznam hrán  $EDGE$  v poli veľkosti  $2|E|$   
 $EDGE$  lexikograficky utriedime – čas  $O(\log |E|)$  s  $O(|E|)$  procesormi

# “Zorientovanie” grafu

Vstup:  $G = (V, E)$  neorientovaný alebo orientovaný Eulerovský graf

Výstup: Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami

**Predspracovanie pre neorientovaný graf  $H = (V, E)$**  – voľba orientácie hrán

hranu  $\{i, j\}$  nahradíme dvojicou orientovaných hrán  $(i, j)$  a  $(j, i)$ ; jednu z nich musíme “zahodiť”

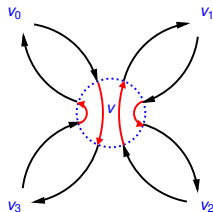
reprezentácia: zoznam hrán  $EDGE$  v poli veľkosti  $2|E|$   
 $EDGE$  lexikograficky utriedime – čas  $O(\log |E|)$  s  $O(|E|)$  procesormi

dostaneme  $EDGE'$ , kde hrany vychádzajúce z jedného vrcholu  $v$  idú za sebou a môžeme ich oindexovať  $(v, v_0)$ ,  $(v, v_1)$ ,  $\dots$ ,  $(v, v_{d-1})$ , kde  $d$  je stupeň vrcholu  $v$  v grafe  $H$

# “Zorientovanie” grafu

dokončenie

- definujeme následníka hrany: pre každé  $v \in V$  a  $i$  nepárne  
 $SUCCESSOR[(v_i, v)] := (v, v_{i+1})$

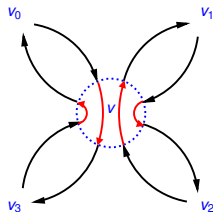


$SUCCESSOR[(v_{i+1}, v)] := (v, v_i)$   
 ( $i + 1$  sa počíta modulo  $d$ )

# “Zorientovanie” grafu

dokončenie

- definujeme následníka hrany: pre každé  $v \in V$  a  $i$  nepárne  
 $SUCCESSOR[(v_i, v)] := (v, v_{i+1})$



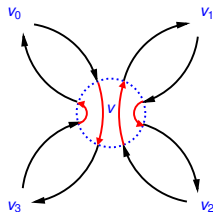
$SUCCESSOR[(v_{i+1}, v)] := (v, v_i)$   
 ( $i + 1$  sa počíta modulo  $d$ )

- tým sa vytvoria cykly s tým, že ak tam bude cyklus  $C$ , tak tam bude aj opačne orientovaný cyklus  $C'$  cez tie isté vrcholy

# “Zorientovanie” grafu

dokončenie

- definujeme následníka hrany: pre každé  $v \in V$  a  $i$  nepárne  
 $SUCCESSOR[(v_i, v)] := (v, v_{i+1})$



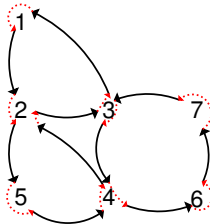
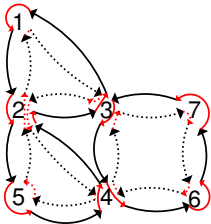
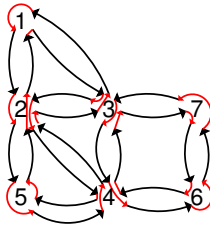
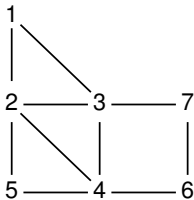
$$SUCCESSOR[(v_{i+1}, v)] := (v, v_i)$$

( $i + 1$  sa počíta modulo  $d$ )

- tým sa vytvoria cykly s tým, že ak tam bude cyklus  $C$ , tak tam bude aj opačne orientovaný cyklus  $C'$  cez tie isté vrcholy
- práve jeden z dvojice cyklov  $C$ ,  $C'$  zrušíme: napr. lexikograficky utriedime hrany cyklu a ten z cyklov  $C$ ,  $C'$ , ktorý má lexikograficky väčšiu lexikograficky minimálnu hranu zrušíme a jeho zoznam hrán vyradíme z  $EDGE$

# “Zorientovanie” grafu

## Príklad



# Krok 1 – vytvorenie cyklov

pre Eulerovský orientovaný graf

- *EDGE* je zoznam hrán grafu; utriedime podľa opačného lexikografického usporiadania (najprv 2. zložka, potom 1.)

# Krok 1 – vytvorenie cyklov

pre Eulerovský orientovaný graf

- *EDGE* je zoznam hrán grafu; utriedime podľa opačného lexikografického usporiadania (najprv 2. zložka, potom 1.)
- *SUCCESSOR* := *EDGE*



# Krok 1 – vytvorenie cyklov

pre Eulerovský orientovaný graf

- *EDGE* je zoznam hrán grafu; utriedime podľa opačného lexikografického usporiadania (najprv 2. zložka, potom 1.)
- *SUCCESSOR* := *EDGE*
- *SUCCESSOR* utriedime podľa lexikografického usporiadania; pri triedení si udržujeme  $P[h]$  – pôvodná poloha  $h$ -tej hrany  $(i, j)$  v poli *EDGE* spolu s hranou  $(i, j)$   
*EDGE* a *SUCCESSOR* definujú cykly

$$EDGE[P[h]] = SUCCESSOR[h]$$

<i>h</i>	1	2	3	4	5	...
<i>EDGE</i>	(2, 1)	(3, 1)	(3, 2)	(5, 2)	(1, 3)	...
<i>SUCC</i>	(1, 3)	(1, 5)	(2, 1)	(2, 4)	(3, 2)	...
<i>P</i>	5	10	1	8	3	...

# Krok 1 – vytvorenie cyklov

pre Eulerovský orientovaný graf

- *EDGE* je zoznam hrán grafu; utriedime podľa opačného lexikografického usporiadania (najprv 2. zložka, potom 1.)
- *SUCCESSOR* := *EDGE*
- *SUCCESSOR* utriedime podľa lexikografického usporiadania; pri triedení si udržujeme  $P[h]$  – pôvodná poloha  $h$ -tej hrany  $(i, j)$  v poli *EDGE* spolu s hranou  $(i, j)$   
*EDGE* a *SUCCESSOR* definujú cykly

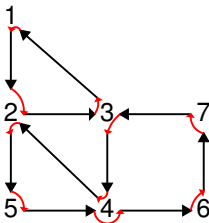
$$EDGE[P[h]] = SUCCESSOR[h]$$

<i>h</i>	1	2	3	4	5	...
<i>EDGE</i>	(2, 1)	(3, 1)	(3, 2)	(5, 2)	(1, 3)	...
<i>SUCC</i>	(1, 3)	(1, 5)	(2, 1)	(2, 4)	(3, 2)	...
<i>P</i>	5	10	1	8	3	...

- čas  $O(\log |E|) = O(\log |V|) = O(\log n)$  s  $O(m)$  procesormi pre  $n = O(|V|)$  a  $m = O(|E|)$

# Krok 1 – vytvorenie cyklov

## Príklad



<i>h</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>EDGE</i>	(3, 1)	(1, 2)	(4, 2)	(2, 3)	(7, 3)	(3, 4)	(5, 4)	(2, 5)	(4, 6)	(6, 7)
<i>SUCC</i>	(1, 2)	(2, 3)	(2, 5)	(3, 1)	(3, 4)	(4, 2)	(4, 6)	(5, 4)	(6, 7)	(7, 3)
<i>P</i>	2	4	8	1	6	3	9	7	10	5

## Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

- reprezentant cyklu = lexikograficky najmenšia hrana cyklu – zdvojovaním cez  $P[h]$

## Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

- reprezentant cyklu = lexikograficky najmenšia hrana cyklu – zdvojovaním cez  $P[h]$
- čas  $O(\log n)$  s  $O(m)$  procesormi

## Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

- reprezentant cyklu = lexikograficky najmenšia hrana cyklu – zdvojovaním cez  $P[h]$
- čas  $O(\log n)$  s  $O(m)$  procesormi
- ozn.  $C$  množinu reprezentantov (hrán) cyklov  
skonštruujeme bipartidný graf  $G' = (V', E')$  kde  $V' = V \cup C$ ,  
 $E' = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in C, u \text{ je v cykle reprezentovanom } v\}$

**for all  $1 \leq i \leq m$  in parallel do**

**for  $EDGE[i] = (u, v)$  do**

**begin**  $EDGE'[2i - 1] := (u, CYCREP[i])$

$EDGE'[2i] := (v, CYCREP[i])$

## Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

- reprezentant cyklu = lexikograficky najmenšia hrana cyklu – zdvojovaním cez  $P[h]$
- čas  $O(\log n)$  s  $O(m)$  procesormi
- ozn.  $C$  množinu reprezentantov (hrán) cyklov  
skonštruujeme bipartidný graf  $G' = (V', E')$  kde  $V' = V \cup C$ ,  
 $E' = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in C, u \text{ je v cykle reprezentovanom } v\}$

**for all  $1 \leq i \leq m$  in parallel do**

**for  $EDGE[i] = (u, v)$  do**

**begin**  $EDGE'[2i - 1] := (u, CYCREP[i])$

$EDGE'[2i] := (v, CYCREP[i])$

- čas  $O(1)$ ,  $O(m)$  procesorov

## Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

pokračovanie

- každý vrchol prispeje do *EDGE'* aspoň dvakrát a môže ležať vo viacerých cykloch, cyklus môže cez jeden vrchol prechádzať viackrát



## Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

pokračovanie

- každý vrchol prispeje do *EDGE'* aspoň dvakrát a môže ležať vo viacerých cykloch, cyklus môže cez jeden vrchol prechádzať viackrát
- odstránime duplikáty – lexikograficky utriedime *EDGE* a vynecháme duplikáty (kompresiou poľa)

## Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

pokračovanie

- každý vrchol prispeje do  $EDGE'$  aspoň dvakrát a môže ležať vo viacerých cykloch, cyklus môže cez jeden vrchol prechádzať viackrát
- odstránime duplikáty – lexikograficky utriedime  $EDGE$  a vynecháme duplikáty (kompresiou poľa)
- pritom si pre každú hranu  $(u, v) \in EDGE'$  pamätáme reprezentanta –  $CERTIFICATE[(u, e)]$  – hrana vchádzajúca do  $u$  a ležiaca v cykle obsahujúcom hranu  $e$

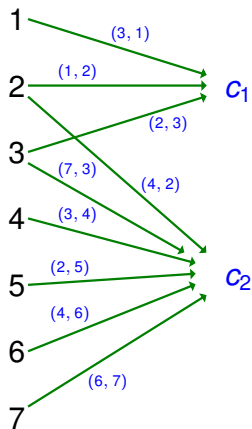
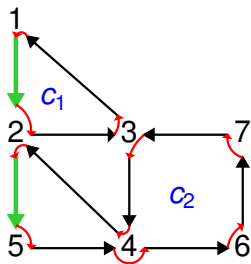
## Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

pokračovanie

- každý vrchol prispeje do  $EDGE'$  aspoň dvakrát a môže ležať vo viacerých cykloch, cyklus môže cez jeden vrchol prechádzať viackrát
- odstránime duplikáty – lexikograficky utriedime  $EDGE$  a vynecháme duplikáty (kompresiou poľa)
- pritom si pre každú hranu  $(u, v) \in EDGE'$  pamätáme reprezentanta –  $CERTIFICATE[(u, e)]$  – hrana vchádzajúca do  $u$  a ležiaca v cykle obsahujúcom hranu  $e$
- celkovo  $m$  procesorov a čas  $O(\log n)$

# Krok 2 – počítanie reprezentantov cyklov

## Príklad



## Krok 3 – kostra grafu $G'$

- kostra  $T$  – čas  $O(\log^2 n)$  s  $O(\frac{n^2}{\log^2 n})$  procesormi

## Krok 3 – kostra grafu $G'$

- kostra  $T$  – čas  $O(\log^2 n)$  s  $O(\frac{n^2}{\log^2 n})$  procesormi
- $T$  je strom, ku každej hrane pridáme opačne orientovanú hranu  $\Rightarrow$  graf  $T'$

## Krok 3 – kostra grafu $G'$

- kostra  $T$  – čas  $O(\log^2 n)$  s  $O(\frac{n^2}{\log^2 n})$  procesormi
- $T$  je strom, ku každej hrane pridáme opačne orientovanú hranu  $\Rightarrow$  graf  $T'$
- na  $T'$  postavíme Eulerovský cyklus

## Krok 3 – kostra grafu $G'$

- kostra  $T$  – čas  $O(\log^2 n)$  s  $O(\frac{n^2}{\log^2 n})$  procesormi
- $T$  je strom, ku každej hrane pridáme opačne orientovanú hranu  $\Rightarrow$  graf  $T'$
- na  $T'$  postavíme Eulerovský cyklus



## Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

Veľký cyklus bude obsahovať hrany z  $T'$  a z  $G$ . Poradie hrán z  $G$  definuje Eulerovský cyklus pre  $G$  a hrany z  $T'$  tvoria Eulerovský cyklus pre  $T'$ .

- definujeme cyklické usporiadanie hrán incidentných s vrcholom  $w \in C - \{v_0, w\}, \{v_1, w\}, \dots, \{v_{d-1}, w\}$ :

## Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

Veľký cyklus bude obsahovať hrany z  $T'$  a z  $G$ . Poradie hrán z  $G$  definuje Eulerovský cyklus pre  $G$  a hrany z  $T'$  tvoria Eulerovský cyklus pre  $T'$ .

- definujeme cyklické usporiadanie hrán incidentných s vrcholom  $w \in C - \{v_0, w\}, \{v_1, w\}, \dots, \{v_{d-1}, w\}$ :
- pre  $0 \leq \alpha \leq d - 1$  nech  
 $(i_\alpha, v_\alpha)$  označuje  $CERTIFICATE[(v_\alpha, w)]$  a  
 $(v_\alpha, j_\alpha)$  označuje  $SUCCESSOR[(i_\alpha, v_\alpha)]$  po Kroku 1

## Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

Veľký cyklus bude obsahovať hrany z  $T'$  a z  $G$ . Poradie hrán z  $G$  definuje Eulerovský cyklus pre  $G$  a hrany z  $T'$  tvoria Eulerovský cyklus pre  $T'$ .

- definujeme cyklické usporiadanie hrán incidentných s vrcholom  $w \in C - \{v_0, w\}, \{v_1, w\}, \dots, \{v_{d-1}, w\}$ :
- pre  $0 \leq \alpha \leq d - 1$  nech  $(i_\alpha, v_\alpha)$  označuje  $CERTIFICATE[(v_\alpha, w)]$  a  $(v_\alpha, j_\alpha)$  označuje  $SUCCESSOR[(i_\alpha, v_\alpha)]$  po Kroku 1
- upravíme  $EDGE$  a  $SUCCESSOR$ :

## Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

Veľký cyklus bude obsahovať hrany z  $T'$  a z  $G$ . Poradie hrán z  $G$  definuje Eulerovský cyklus pre  $G$  a hrany z  $T'$  tvoria Eulerovský cyklus pre  $T'$ .

- definujeme cyklické usporiadanie hrán incidentných s vrcholom  $w \in C - \{v_0, w\}, \{v_1, w\}, \dots, \{v_{d-1}, w\}$ :
- pre  $0 \leq \alpha \leq d - 1$  nech  $(i_\alpha, v_\alpha)$  označuje  $CERTIFICATE[(v_\alpha, w)]$  a  $(v_\alpha, j_\alpha)$  označuje  $SUCCESSOR[(i_\alpha, v_\alpha)]$  po Kroku 1
- upravíme  $EDGE$  a  $SUCCESSOR$ :
  - do  $EDGE$  pridáme hrany z  $T'$

## Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

Veľký cyklus bude obsahovať hrany z  $T'$  a z  $G$ . Poradie hrán z  $G$  definuje Eulerovský cyklus pre  $G$  a hrany z  $T'$  tvoria Eulerovský cyklus pre  $T'$ .

- definujeme cyklické usporiadanie hrán incidentných s vrcholom  $w \in C - \{v_0, w\}, \{v_1, w\}, \dots, \{v_{d-1}, w\}$ :
- pre  $0 \leq \alpha \leq d - 1$  nech  $(i_\alpha, v_\alpha)$  označuje  $CERTIFICATE[(v_\alpha, w)]$  a  $(v_\alpha, j_\alpha)$  označuje  $SUCCESSOR[(i_\alpha, v_\alpha)]$  po Kroku 1
- upravíme  $EDGE$  a  $SUCCESSOR$ :
  - do  $EDGE$  pridáme hrany z  $T'$
  - $\forall w \in C, 0 \leq \alpha \leq d - 1$ :
 
$$\begin{aligned} SUCCESSOR[(v_\alpha, w)] &:= (v_\alpha, j_\alpha) \\ SUCCESSOR[(i_\alpha, v_\alpha)] &:= (w, v_\alpha) \end{aligned}$$

## Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

Veľký cyklus bude obsahovať hrany z  $T'$  a z  $G$ . Poradie hrán z  $G$  definuje Eulerovský cyklus pre  $G$  a hrany z  $T'$  tvoria Eulerovský cyklus pre  $T'$ .

- definujeme cyklické usporiadanie hrán incidentných s vrcholom  $w \in C - \{v_0, w\}, \{v_1, w\}, \dots, \{v_{d-1}, w\}$ :
- pre  $0 \leq \alpha \leq d - 1$  nech  $(i_\alpha, v_\alpha)$  označuje  $CERTIFICATE[(v_\alpha, w)]$  a  $(v_\alpha, j_\alpha)$  označuje  $SUCCESSOR[(i_\alpha, v_\alpha)]$  po Kroku 1
- upravíme  $EDGE$  a  $SUCCESSOR$ :
  - do  $EDGE$  pridáme hrany z  $T'$
  - $\forall w \in C, 0 \leq \alpha \leq d - 1$ :  $SUCCESSOR[(v_\alpha, w)] := (v_\alpha, j_\alpha)$   
 $SUCCESSOR[(i_\alpha, v_\alpha)] := (w, v_\alpha)$
  - $\forall v_\alpha, (w, v_\alpha) \in T'$ , nech  $v_\alpha$  susedí s  $w_0, w_1, \dots, w_{d-1} \in C$ , potom  $SUCCESSOR[(w_i, v_\alpha)] := (v_\alpha, w_{i+1 \pmod{d}})$

# Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

pokračovanie

- dostávame Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami  $GU T'$ :

# Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

pokračovanie

- dostávame Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami  $GU T'$ :
  - Každé  $w \in C$  definuje prechádzanie jedným cyklom



# Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

pokračovanie

- dostávame Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami  $GU T'$ :
  - Každé  $w \in C$  definuje prechádzanie jedným cyklom
  - $v \in V$  sú akési “mosty” medzi cyklami z  $C$

# Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

pokračovanie

- dostávame Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami  $G \cup T'$ :
  - Každé  $w \in C$  definuje prechádzanie jedným cyklom
  - $v \in V$  sú akési “mosty” medzi cyklami z  $C$
  - keď “stiahneme” všetky hrany týchto mostov (tj. vynecháme hrany z  $T'$ ), tak dostaneme Eulerov cyklus pre  $G$

# Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

pokračovanie

- dostávame Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami  $G \cup T'$ :
  - Každé  $w \in C$  definuje prechádzanie jedným cyklom
  - $v \in V$  sú akési “mosty” medzi cyklami z  $C$
  - keď “stiahneme” všetky hrany týchto mostov (tj. vynecháme hrany z  $T'$ , tak dostaneme Eulerov cyklus pre  $G$
  - zložitosť  $O(1)$  krokov s  $O(m)$  procesormi

# Krok 4 – vytvorenie veľkého cyklu

pokračovanie

- dostávame Eulerov cyklus prechádzajúci všetkými hranami  $G \cup T'$ :
  - Každé  $w \in C$  definuje prechádzanie jedným cyklom
  - $v \in V$  sú akési “mosty” medzi cyklami z  $C$
  - keď “stiahneme” všetky hrany týchto mostov (tj. vynecháme hrany z  $T'$ , tak dostaneme Eulerov cyklus pre  $G$
  - zložitosť  $O(1)$  krokov s  $O(m)$  procesormi
- Celková zložitosť: čas  $O(\log^2 n)$  s  $O(n^2)$  procesormi.