
Problém stabilních manželství.

Problém stabilních manželství

- ◆ problém majitele sňatkové kanceláře:
- ◆ klientelu tvoří n mužů a n žen
- ◆ každý klient vyjádřil své představy o potenciálním partnerovi tak, že všechny klienty opačného pohlaví uspořádal do posloupnosti dle svých osobních preferencí.
- ◆ je třeba vytvořit n párů tak, aby byly zadané preference respektovány.

<i>muži</i>	<i>ženy</i>
a : A,B,C,D	A : d,c,a,b
b : B,C,A,D	B : c,a,b,d
c : A,C,B,D	C : a,c,b,d
d : B,A,D,C	D : b,a,c,d

- ◆ Žena A a muž d tvoří v párování aA, bB, cC, dD *nestabilní pár*.
- ◆ *Stabilní párování* = párování bez nestabilních párů
- ◆ Existuje vždy (úplné) stabilní párování, a pokud ano, jak je lze efektivně nalézt?

Algoritmus (Gale, Shapley)

Vstup: n mužů a n žen s preferenčními seznamy

Výstup: stabilní párování

for každého muže m **do** HledejPartnerku(m) **od** .

procedure HledejPartnerku(m)

$s :=$ první nevyškrtnutá žena na preferenčním seznamu muže m

if z je zasnoubena **then** $s :=$ snoubenec ženy z

if z preferuje s před m

then vyškrtni z z preferenčního seznamu muže m
HledejPartnerku(m)

else vyškrtni z z preferenčního seznamu muže s
 z se zasnoubí s m

HledejPartnerku(s) **fi**

else z se zasnoubí s m

Analýza algoritmu: částečná správnost

► Obdržíme vždy párování?

- žena nepřijme nabídku k sňatku, aniž by zrušila předchozí zasnoubení
- nikdo není zasnouben s více než jednou osobou.

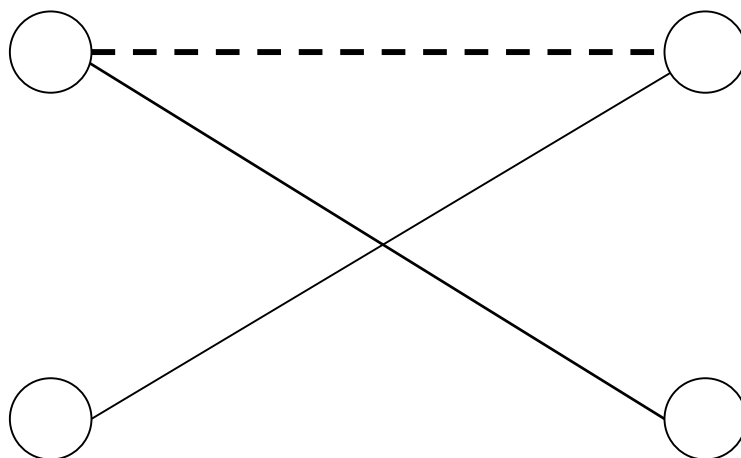
► Je to párování úplné?

- žena nezruší zasnoubení, nemá-li lepší nabídku
- byla-li alespoň jednou požádána o ruku, bude na konci zasnoubena
- na konci zůstane nezadaná žena => neobdržela ani jednu nabídku.
- současně však musí zbýt i nezadaný muž
- proč ji tedy nepožádal o ruku?

Částečná správnost - dokončení

◆ Je to párování stabilní?

Sporem: Necht' existuje nestabilní pár.



Konečnost a časová složitost algoritmu

◆ Konečnost

Žádný muž nežádá jednu ženu o ruku dvakrát. Celkový počet nabídek k sňatku je tedy nejvýše n^2 .

◆ Časová složitost

Protože celkový počet kroků algoritmu je úměrný počtu nabídek k sňatku, je časová složitost algoritmu nejvýše $O(n^2)$.

Vlastnosti Gale-Shapleyho algoritmu

- ◆ V párování, které nalezne Gale-Shapleyho algoritmus, obdrží každý muž nejlepší partnerku, kterou může mít v libovolném stabilním párování.
- ◆ Získané párování je tedy **nejlepší pro muže!**
- ◆ V párování, které nalezne Gale-Shapleyho algoritmus, obdrží každá žena nejhoršího partnera, kterého může mít v libovolném stabilním párování.
- ◆ Získané párování je tedy **nejhorší pro ženy!**

Zobecnění úlohy

- ◆ n mužů, m žen, $n \neq m$
- ◆ problém starých mládenců (co když někdo zůstane sám?)
- ◆ neúplné preferenční seznamy
- ◆ mnohoženství
- ◆ pomůže někomu, když uvede falešné údaje?
- ◆ patové ohodnocení partnerů

Historie problému a literatura

- ◆ D.E.Knuth: *Mariages Stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires*. Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1976.
- ◆ D.Gusfield, R.W.Irving: *The Stable Marriage Problem*, MIT Press, Cambridge, MA 1989.
- ◆ T.Feder: *Stable Networks and Product Graphs*, Memoirs Amer. Math. Soc. 555, 1995.
 - „minimum regret“ s.m. (min ohodnocení nejméně přijatelného partnera) v čase $O(n^2)$
 - „egalitarian“ s.m. (min součet ohodnocení partnerů) v čase $O(n^3)$