Paralelné algoritmy, časť č. 4

František Mráz

Kabinet software a výuky informatiky, MFF UK, Praha

Paralelné algoritmy, 2011/2012

Obsah

Úvod

Dolné odhady sú ťažké. Ukážeme dva:

1. pre výpočet *OR* na n bitoch pre CREW PRAMe,
2. počítanie súčtu n kladných čísel na CRCW PRAMe.

Dolný odhad časovej zložitosti funkcie *OR* na CREW PRAMe

Veta

Na CREW PRAMe výpočet booleovskej funkcie OR z n bitov vyžaduje aspoň $\log_b n$ krokov, kde $b > 4.79$.

Dôkaz:

- Iba idea, pretože úplný dôkaz je veľmi technický a dlhý.
- Hovoríme, že bit i ovplyvňuje procesor p v čase t, ak sa obsah lokálnej pamäte procesoru p v čase t líši podľa toho, či vstup x_i je 0 alebo 1, zatiaľ čo ostatné vstupné bity sú nulové.
- Hovoríme, že bit x_i ovplyvňuje bunku m spoločnej pamäte v čase t, ak . . .
- Indukciou podľa t sa dá dokázať, že počet vstupných bitov ovplyvňujúcich ľubovoľný procesor alebo pamäťovú bunku v čase t je najviac c^t, kde c je vhodná konštanta.
- Všetky vstupné bity musia na konci výpočtu ovplyvniť výstupnú bunku $\Rightarrow$ aspoň $\log_c n$ krokov.

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

CRCW PRAM s obmedzeným prístupom:

- procesory nemajú globálnu pamäť
- komunikácia iba cez tzv. komunikačné registre; každý procesor má práve 1 komunikačný register prístupný pre ostatné procesory na čítanie i zápis. Ostatné registre jednotlivých procesorov sú lokálne.

Veta

Nech $P(n)$ je ľubovoľná funkcia. PRAM s obmedzeným prístupom potrebuje s $P(n)$ procesormi potrebuje na sčítanie n čísel čas aspoň $\lceil \log_3 n \rceil$.

Dôkaz:

- Nech M je PRAM s obmedzeným prístupom s $P(n)$ procesormi, ktorý dokáže sčítať n čísel v čase $T(n)$; vstup: $\mathbf{x} = (x_0, \ldots x_{n-1})$, čísla $x_i \leq N$ pre nejakú konštantu $N > 0$.
- počítajú procesory $0, 1, \ldots, P(n) - 1$
- výstup bude v pamäti procesoru 0

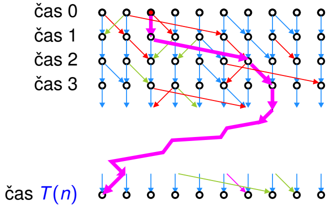
Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- Komunikačný graf $G_{\mathbf{x}}$ výpočtu PRAMu nad vstupom $\mathbf{x}$:
  - vrcholy (p, t), $0 \leq p < P(n)$, $0 \leq t \leq T(n)$,
  - hrany: z (p_1, t) do $(p_2, t+1)$, ak
    - buď $p_1 = p_2$,
    - alebo v kroku t výpočtu procesor p_2 čítal hodnotu z komunikačného registru procesora p_1
    - alebo v kroku t výpočtu procesor p_1 úspešne zapísal hodnotu do komunikačného registru procesora p_2

$$
\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[d] \arrow[dr] & (1,0) \arrow[d] \arrow[dr] & (2,0) \arrow[dl] \arrow[d] & \cdots \arrow[dr] & (P(n)-1,0) \arrow[d] \\
(0,1) & (1,1) & (2,1) & \cdots & (P(n)-1,1)
\end{tikzcd}
$$

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- i-ty prvok n-tice $\mathbf{x}$ sa nazýva dosiahnuteľný, ak v $G_{\mathbf{x}}$ existuje cesta z vrcholu $(i, 0)$ do vrcholu $(0, T(n))$



- nie je nutné, aby všetky prvky vstupnej n-tice boli dosiahnuteľné (viz. výpočet maxima).
- ukážeme, že pre dostatočne veľké N existuje n-tica, ktorej všetky prvky sú dosiahnuteľné.
- pre spor predpokladajme, že každý vstup má nejaký nedosiahnuteľný prvok
- dosiahnuteľná množina n-tice $\mathbf{x}$ je $R_{\mathbf{x}} = \{i \mid i \text{ dosiahnuteľné}\}$
- kritický reťazec n-tice $\mathbf{x}$ je $Q_{\mathbf{x}} = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})$, kde i je minimálne také, že i-ty prvok $\mathbf{x}$ nie je dosiahnuteľný

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- predpokladajme, že máme pevne zvolené $\mathbf{x}$: koľko existuje vstupov $\mathbf{y}$ takých, že $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$? Ak $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$, potom dosiahnuteľné množiny pre $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ sú totožné – $R_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{y}}$. Predpokladajme, že naviac $Q_{\mathbf{x}} = Q_{\mathbf{y}}$ a $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, potom sa $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ môžu líšiť iba v nedosiahnuteľnom prvku, ale hodnota výstupu nezávisí na nedosiahnuteľných prvkoch $\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- počet rôznych kritických reťazcov N^{n-1}
- teda najviac N^{n-1} vstupov môže mať zhodný komunikačný graf – inak by sme našli aspoň dva vstupy $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$ také, že $G_{\mathbf{y}_1} = G_{\mathbf{y}_2}$, $Q_{\mathbf{y}_1} = Q_{\mathbf{y}_2}$, pre ktoré by M dal zhodný výstup.
- Nech $\mathcal{G}(n)$ označuje počet rôznych komunikačných grafov pre n-prvkové vstupné vektory. Aspoň jeden graf musí byť spoločným komunikačným grafom pre aspoň $\frac{N^n}{\mathcal{G}(n)}$ vstupných n-tíc.
- teda ak je $N > \mathcal{G}(n)$, je $\frac{N^n}{\mathcal{G}(n)} > N^{n-1}$ čo je v spore s bodom 5

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

Odhad veľkosti $\mathcal{G}(n)$

- komunikačný graf má $T(n)$ vrstiev. Počet možností pre jednu vrstvu:
  - pre operáciu čítania $P(n)^{P(n)}$
  - pre operáciu zápisu menší než $P(n)^{P(n)+O(1)}$ (počet bipartitných párovaní)
- celkovo

$$\mathcal{G}(n) \leq \left(P(n)^{2P(n)+O(1)}\right)^{T(n)}$$

- teda stačí uvažovať súčet n čísel veľkosti $O(P(n)(\log P(n)) \log n)$ bitov
- Veta sa dá zovšeobecniť na ľubovoľnú funkciu n premenných takú, že keď zvolíme pevne $n-1$ vstupov a výstup, tak je zvyšný vstup určený jednoznačne

Zovšeobecnenie na CRCW PRAM bez obmedzení

Veta

Súčet n ľubovoľných celých čísel na CRCW PRAMe vyžaduje čas aspoň $\lceil \log n \rceil$ nezávisle od ohraničenia na počet procesorov (tj. ak ohraničíme počet procesorov na $P(n)$, kde $P(n)$ je ľubovoľná funkcia, a neohraničíme veľkosť vstupných čísel).

Dôkaz:

- podobne ako vyššie; PRAM s $P(n)$ procesormi, ktorý pracuje $T(n)$ krokov, použije maximálne $P(n)T(n)$ rôznych buniek spoločnej pamäte
- komunikačný graf sa zostrojí nad množinou uzlov tvaru (b, t), kde b je číslo pamäťovej bunky a t je krok výpočtu.