

Paralelné algoritmy, část č. 4

František Mráz

Kabinet software a výuky informatiky, MFF UK, Praha

Paralelné algoritmy, 2011/2012

- 1 Dolné odhady časovej zložitosti na PRAMe
 - Počítanie OR na CREW PRAMe
 - Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom
 - Počítanie súčtu na CRCW PRAMe so spoločnou pamäťou

Úvod

Dolné odhady sú ťažké. Ukážeme dva:

- 1 pre výpočet OR na n bitoch pre CREW PRAMe,

Úvod

Dolné odhady sú ťažké. Ukážeme dva:

- 1 pre výpočet *OR* na n bitoch pre CREW PRAMe,
- 2 počítanie súčtu n kladných čísel na CRCW PRAMe.

Outline

- 1 Dolné odhady časovej zložitosti na PRAMe
 - Počítanie OR na CREW PRAMe
 - Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom
 - Počítanie súčtu na CRCW PRAMe so spoločnou pamäťou

Dolný odhad časovej zložitosti funkcie *OR* na CREW PRAMe

Veta

Na CREW PRAMe výpočet booleovskej funkcie OR z n bitov vyžaduje aspoň $\log_b n$ krokov, kde $b > 4.79$.

Dolný odhad časovej zložitosti funkcie *OR* na CREW PRAMe

Veta

Na CREW PRAMe výpočet booleovskej funkcie *OR* z n bitov vyžaduje aspoň $\log_b n$ krokov, kde $b > 4.79$.

Dôkaz:

- Iba idea, pretože úplný dôkaz je veľmi technický a dlhý.

Dolný odhad časovej zložitosti funkcie OR na CREW PRAMe

Veta

Na CREW PRAMe výpočet booleovskej funkcie OR z n bitov vyžaduje aspoň $\log_b n$ krokov, kde $b > 4.79$.

Dôkaz:

- Iba idea, pretože úplný dôkaz je veľmi technický a dlhý.
- Hovoríme, že bit i ovplyvňuje procesor p v čase t , ak sa obsah lokálnej pamäte procesoru p v čase t líši podľa toho, či vstup x_i je 0 alebo 1, zatiaľ čo ostatné vstupné bity sú nulové.

Dolný odhad časovej zložitosti funkcie *OR* na CREW PRAMe

Veta

Na CREW PRAMe výpočet booleovskej funkcie *OR* z n bitov vyžaduje aspoň $\log_b n$ krokov, kde $b > 4.79$.

Dôkaz:

- Iba idea, pretože úplný dôkaz je veľmi technický a dlhý.
- Hovoríme, že bit i ovplyvňuje procesor p v čase t , ak sa obsah lokálnej pamäte procesoru p v čase t líši podľa toho, či vstup x_i je 0 alebo 1, zatiaľ čo ostatné vstupné bity sú nulové.
- Hovoríme, že bit x_i ovplyvňuje bunku m spoločnej pamäte v čase t , ak ...

Dolný odhad časovej zložitosti funkcie OR na CREW PRAMe

Veta

Na CREW PRAMe výpočet booleovskej funkcie OR z n bitov vyžaduje aspoň $\log_b n$ krokov, kde $b > 4.79$.

Dôkaz:

- Iba idea, pretože úplný dôkaz je veľmi technický a dlhý.
- Hovoríme, že bit i ovplyvňuje procesor p v čase t , ak sa obsah lokálnej pamäte procesoru p v čase t líši podľa toho, či vstup x_i je 0 alebo 1, zatiaľ čo ostatné vstupné bity sú nulové.
- Hovoríme, že bit x_i ovplyvňuje bunku m spoločnej pamäte v čase t , ak ...
- Indukciou podľa t sa dá dokázať, že počet vstupných bitov ovplyvňujúcich ľubovoľný procesor alebo pamäťovú bunku v čase t je najviac c^t , kde c je vhodná konštanta.

Dolný odhad časovej zložitosti funkcie *OR* na CREW PRAMe

Veta

Na CREW PRAMe výpočet booleovskej funkcie *OR* z n bitov vyžaduje aspoň $\log_b n$ krokov, kde $b > 4.79$.

Dôkaz:

- Iba idea, pretože úplný dôkaz je veľmi technický a dlhý.
- Hovoríme, že bit i ovplyvňuje procesor p v čase t , ak sa obsah lokálnej pamäte procesoru p v čase t líši podľa toho, či vstup x_i je 0 alebo 1, zatiaľ čo ostatné vstupné bity sú nulové.
- Hovoríme, že bit x_i ovplyvňuje bunku m spoločnej pamäte v čase t , ak ...
- Indukciou podľa t sa dá dokázať, že počet vstupných bitov ovplyvňujúcich ľubovoľný procesor alebo pamäťovú bunku v čase t je najviac c^t , kde c je vhodná konštanta.
- Všetky vstupné bity musia na konci výpočtu ovplyvniť výstupnú bunku \Rightarrow aspoň $\log_c n$ krokov.

Outline

- 1 Dolné odhady časovej zložitosti na PRAMe
 - Počítanie OR na CREW PRAMe
 - Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom
 - Počítanie súčtu na CRCW PRAMe so spoločnou pamäťou

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

CRCW PRAM s obmedzeným prístupom:

- procesory nemajú globálnu pamäť

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

CRCW PRAM s obmedzeným prístupom:

- procesory nemajú globálnu pamäť
- komunikácia iba cez tzv. komunikačné registre; každý procesor má práve 1 komunikačný register prístupný pre ostatné procesory na čítanie i zápis. Ostatné registre jednotlivých procesorov sú lokálne.

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

CRCW PRAM s obmedzeným prístupom:

- procesory nemajú globálnu pamäť
- komunikácia iba cez tzv. komunikačné registre; každý procesor má práve 1 komunikačný register prístupný pre ostatné procesory na čítanie i zápis. Ostatné registre jednotlivých procesorov sú lokálne.

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

CRCW PRAM s obmedzeným prístupom:

- procesory nemajú globálnu pamäť
- komunikácia iba cez tzv. komunikačné registre; každý procesor má práve 1 komunikačný register prístupný pre ostatné procesory na čítanie i zápis. Ostatné registre jednotlivých procesorov sú lokálne.

Veta

Nech $P(n)$ je ľubovoľná funkcia. *PRAM s obmedzeným prístupom* potrebuje s $P(n)$ procesormi potrebuje na sčítanie n čísel čas aspoň $\lceil \log_3 n \rceil$.

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

CRCW PRAM s obmedzeným prístupom:

- procesory nemajú globálnu pamäť
- komunikácia iba cez tzv. komunikačné registre; každý procesor má práve 1 komunikačný register prístupný pre ostatné procesory na čítanie i zápis. Ostatné registre jednotlivých procesorov sú lokálne.

Veta

Nech $P(n)$ je ľubovoľná funkcia. PRAM s obmedzeným prístupom potrebuje s $P(n)$ procesormi potrebuje na sčítanie n čísel čas aspoň $\lceil \log_3 n \rceil$.

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

CRCW PRAM s obmedzeným prístupom:

- procesory nemajú globálnu pamäť
- komunikácia iba cez tzv. komunikačné registre; každý procesor má práve 1 komunikačný register prístupný pre ostatné procesory na čítanie i zápis. Ostatné registre jednotlivých procesorov sú lokálne.

Veta

Nech $P(n)$ je ľubovoľná funkcia. PRAM s obmedzeným prístupom potrebuje s $P(n)$ procesormi potrebuje na sčítanie n čísel čas aspoň $\lceil \log_3 n \rceil$.

Dôkaz:

- Nech M je PRAM s obmedzeným prístupom s $P(n)$ procesormi, ktorý dokáže sčítať n čísel v čase $T(n)$; vstup: $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$, čísla $x_i \leq N$ pre nejakú konštantu $N > 0$.

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

CRCW PRAM s obmedzeným prístupom:

- procesory nemajú globálnu pamäť
- komunikácia iba cez tzv. komunikačné registre; každý procesor má práve 1 komunikačný register prístupný pre ostatné procesory na čítanie i zápis. Ostatné registre jednotlivých procesorov sú lokálne.

Veta

Nech $P(n)$ je ľubovoľná funkcia. PRAM s obmedzeným prístupom potrebuje s $P(n)$ procesormi potrebuje na sčítanie n čísel čas aspoň $\lceil \log_3 n \rceil$.

Dôkaz:

- Nech M je PRAM s obmedzeným prístupom s $P(n)$ procesormi, ktorý dokáže sčítať n čísel v čase $T(n)$; vstup: $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$, čísla $x_i \leq N$ pre nejakú konštantu $N > 0$.
- počítajú procesory $0, 1, \dots, P(n) - 1$

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

CRCW PRAM s obmedzeným prístupom:

- procesory nemajú globálnu pamäť
- komunikácia iba cez tzv. komunikačné registre; každý procesor má práve 1 komunikačný register prístupný pre ostatné procesory na čítanie i zápis. Ostatné registre jednotlivých procesorov sú lokálne.

Veta

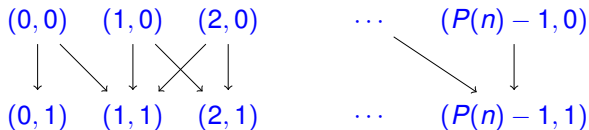
Nech $P(n)$ je ľubovoľná funkcia. PRAM s obmedzeným prístupom potrebuje s $P(n)$ procesormi potrebuje na sčítanie n čísel čas aspoň $\lceil \log_3 n \rceil$.

Dôkaz:

- Nech M je PRAM s obmedzeným prístupom s $P(n)$ procesormi, ktorý dokáže sčítať n čísel v čase $T(n)$; vstup: $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$, čísla $x_i \leq N$ pre nejakú konštantu $N > 0$.
- počítajú procesory $0, 1, \dots, P(n) - 1$
- výstup bude v pamäti procesoru 0

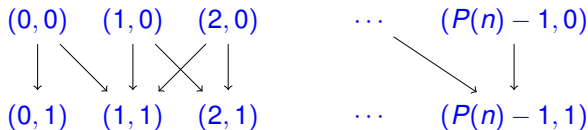
Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- Komunikačný graf G_x výpočtu PRAMu nad vstupom x :



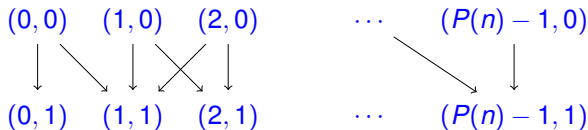
Počítanie súčtu na CRCW PRAME s obmedzeným prístupom

- Komunikačný graf G_x výpočtu PRAMu nad vstupom x :
 - vrcholy (p, t) , $0 \leq p < P(n)$, $0 \leq t \leq T(n)$,



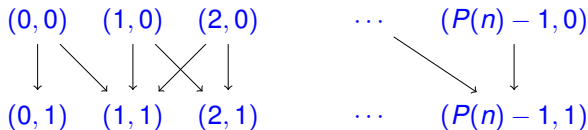
Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- Komunikačný graf G_x výpočtu PRAMu nad vstupom x :
 - vrcholy (p, t) , $0 \leq p < P(n)$, $0 \leq t \leq T(n)$,
 - hrany: z (p_1, t) do $(p_2, t+1)$, ak



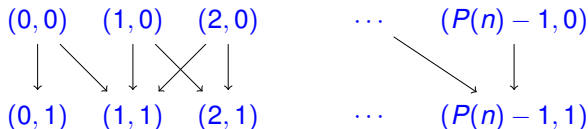
Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- Komunikačný graf G_x výpočtu PRAMu nad vstupom x :
 - vrcholy (p, t) , $0 \leq p < P(n)$, $0 \leq t \leq T(n)$,
 - hrany: z (p_1, t) do $(p_2, t+1)$, ak
 - buď $p_1 = p_2$,



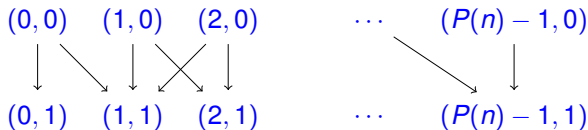
Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- Komunikačný graf G_x výpočtu PRAMu nad vstupom x :
 - vrcholy (p, t) , $0 \leq p < P(n)$, $0 \leq t \leq T(n)$,
 - hrany: z (p_1, t) do $(p_2, t+1)$, ak
 - buď $p_1 = p_2$,
 - alebo v kroku t výpočtu procesor p_2 čítal hodnotu z komunikačného registru procesora p_1



Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- Komunikačný graf G_x výpočtu PRAMu nad vstupom x :
 - vrcholy (p, t) , $0 \leq p < P(n)$, $0 \leq t \leq T(n)$,
 - hrany: z (p_1, t) do $(p_2, t+1)$, ak
 - buď $p_1 = p_2$,
 - alebo v kroku t výpočtu procesor p_2 čítal hodnotu z komunikačného registru procesora p_1
 - alebo v kroku t výpočtu procesor p_1 úspešne zapísal hodnotu do komunikačného registru procesora p_2



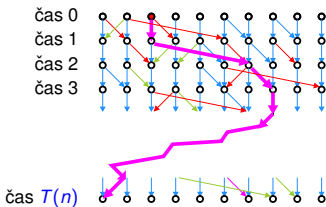
Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- i -ty prvok n -tice \mathbf{x} sa nazýva dosiahnuteľný, ak v $G_{\mathbf{x}}$ existuje cesta z vrcholu $(i, 0)$ do vrcholu $(0, T(n))$

Počítanie súčtu na CRCW PRAME s obmedzeným prístupom

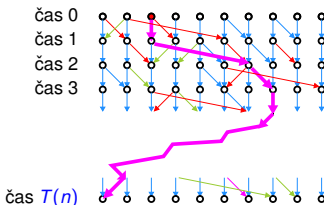
- i -ty prvok n -tice x sa nazýva dosiahnuteľný, ak v G_x existuje cesta z vrcholu $(i, 0)$ do vrcholu $(0, T(n))$

- nie je nutné, aby všetky prvky vstupnej n -tice boli dosiahnuteľné (viz. výpočet maxima).



Počítanie súčtu na CRCW PRAME s obmedzeným prístupom

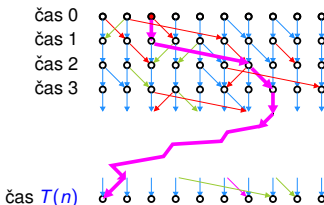
- i -ty prvok n -tice x sa nazýva dosiahnuteľný, ak v G_x existuje cesta z vrcholu $(i, 0)$ do vrcholu $(0, T(n))$



- nie je nutné, aby všetky prvky vstupnej n -tice boli dosiahnuteľné (viz. výpočet maxima).
- ukážeme, že pre dostatočne veľké N existuje n -tica, ktorej všetky prvky sú dosiahnuteľné.

Počítanie súčtu na CRCW PRAME s obmedzeným prístupom

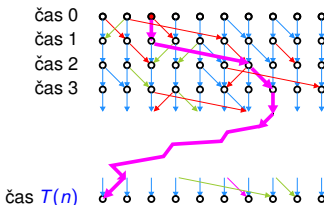
- i -ty prvok n -tice x sa nazýva dosiahnuteľný, ak v G_x existuje cesta z vrcholu $(i, 0)$ do vrcholu $(0, T(n))$



- nie je nutné, aby všetky prvky vstupnej n -tice boli dosiahnuteľné (viz. výpočet maxima).
- ukážeme, že pre dostatočne veľké N existuje n -tica, ktorej všetky prvky sú dosiahnuteľné.
- pre spor predpokladajme, že každý vstup má nejaký nedosiahnuteľný prvok

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

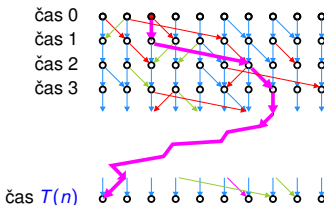
- i -ty prvok n -tice \mathbf{x} sa nazýva dosiahnuteľný, ak v $G_{\mathbf{x}}$ existuje cesta z vrcholu $(i, 0)$ do vrcholu $(0, T(n))$



- nie je nutné, aby všetky prvky vstupnej n -tice boli dosiahnuteľné (viz. výpočet maxima).
- ukážeme, že pre dostatočne veľké N existuje n -tica, ktorej všetky prvky sú dosiahnuteľné.
- pre spor predpokladajme, že každý vstup má nejaký nedosiahnuteľný prvok
- dosiahnuteľná množina n -tice \mathbf{x} je $R_{\mathbf{x}} = \{i \mid i \text{ dosiahnuteľné}\}$

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- i -ty prvok n -tice \mathbf{x} sa nazýva dosiahnuteľný, ak v $G_{\mathbf{x}}$ existuje cesta z vrcholu $(i, 0)$ do vrcholu $(0, T(n))$



- nie je nutné, aby všetky prvky vstupnej n -tice boli dosiahnuteľné (viz. výpočet maxima).
- ukážeme, že pre dostatočne veľké N existuje n -tica, ktorej všetky prvky sú dosiahnuteľné.
- pre spor predpokladajme, že každý vstup má nejaký nedosiahnuteľný prvok
- dosiahnuteľná množina n -tice \mathbf{x} je $R_{\mathbf{x}} = \{i \mid i \text{ dosiahnuteľný}\}$
- kritický reťazec n -tice \mathbf{x} je $Q_{\mathbf{x}} = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$, kde i je minimálne také, že i -ty prvok \mathbf{x} nie je dosiahnuteľný

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- predpokladajme, že máme pevne zvolené \mathbf{x} : koľko existuje vstupov \mathbf{y} takých, že $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$? Ak $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$, potom dosiahnuteľné množiny pre \mathbf{x} a \mathbf{y} sú totožné – $R_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{y}}$. Predpokladajme, že navyše $Q_{\mathbf{x}} = Q_{\mathbf{y}}$ a $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, potom sa \mathbf{x} a \mathbf{y} môžu líšiť iba v nedosiahnuteľnom prvku, ale hodnota výstupu nezávisí na nedosiahnuteľných prvkoch $\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- predpokladajme, že máme pevne zvolené \mathbf{x} : koľko existuje vstupov \mathbf{y} takých, že $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$? Ak $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$, potom dosiahnuteľné množiny pre \mathbf{x} a \mathbf{y} sú totožné – $R_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{y}}$. Predpokladajme, že navyše $Q_{\mathbf{x}} = Q_{\mathbf{y}}$ a $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, potom sa \mathbf{x} a \mathbf{y} môžu líšiť iba v nedosiahnuteľnom prvku, ale hodnota výstupu nezávisí na nedosiahnuteľných prvkoch $\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- počet rôznych kritických reťazcov N^{n-1}

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- predpokladajme, že máme pevne zvolené \mathbf{x} : koľko existuje vstupov \mathbf{y} takých, že $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$? Ak $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$, potom dosiahnuteľné množiny pre \mathbf{x} a \mathbf{y} sú totožné – $R_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{y}}$. Predpokladajme, že navyše $Q_{\mathbf{x}} = Q_{\mathbf{y}}$ a $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, potom sa \mathbf{x} a \mathbf{y} môžu líšiť iba v nedosiahnuteľnom prvku, ale hodnota výstupu nezávisí na nedosiahnuteľných prvkoch $\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- počet rôznych kritických reťazcov N^{n-1}
- teda najviac N^{n-1} vstupov môže mať zhodný komunikačný graf – inak by sme našli aspoň dva vstupy $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$ také, že $G_{\mathbf{y}_1} = G_{\mathbf{y}_2}$, $Q_{\mathbf{y}_1} = Q_{\mathbf{y}_2}$, pre ktoré by M dal zhodný výstup.

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- predpokladajme, že máme pevne zvolené \mathbf{x} : koľko existuje vstupov \mathbf{y} takých, že $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$? Ak $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$, potom dosiahnuteľné množiny pre \mathbf{x} a \mathbf{y} sú totožné – $R_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{y}}$. Predpokladajme, že navyše $Q_{\mathbf{x}} = Q_{\mathbf{y}}$ a $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, potom sa \mathbf{x} a \mathbf{y} môžu líšiť iba v nedosiahnuteľnom prvku, ale hodnota výstupu nezávisí na nedosiahnuteľných prvkoch $\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- počet rôznych kritických reťazcov N^{n-1}
- teda najviac N^{n-1} vstupov môže mať zhodný komunikačný graf – inak by sme našli aspoň dva vstupy $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$ také, že $G_{\mathbf{y}_1} = G_{\mathbf{y}_2}$, $Q_{\mathbf{y}_1} = Q_{\mathbf{y}_2}$, pre ktoré by M dal zhodný výstup.
- Nech $\mathcal{G}(n)$ označuje počet rôznych komunikačných grafov pre n -prvkové vstupné vektory. Aspoň jeden graf musí byť spoločným komunikačným grafom pre aspoň $\frac{N^n}{\mathcal{G}(n)}$ vstupných n -tíc.

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

- predpokladajme, že máme pevne zvolené \mathbf{x} : koľko existuje vstupov \mathbf{y} takých, že $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$? Ak $G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}$, potom dosiahnuteľné množiny pre \mathbf{x} a \mathbf{y} sú totožné – $R_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{y}}$. Predpokladajme, že navyše $Q_{\mathbf{x}} = Q_{\mathbf{y}}$ a $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, potom sa \mathbf{x} a \mathbf{y} môžu líšiť iba v nedosiahnuteľnom prvku, ale hodnota výstupu nezávisí na nedosiahnuteľných prvkoch $\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- počet rôznych kritických reťazcov N^{n-1}
- teda najviac N^{n-1} vstupov môže mať zhodný komunikačný graf – inak by sme našli aspoň dva vstupy $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$ také, že $G_{\mathbf{y}_1} = G_{\mathbf{y}_2}$, $Q_{\mathbf{y}_1} = Q_{\mathbf{y}_2}$, pre ktoré by M dal zhodný výstup.
- Nech $\mathcal{G}(n)$ označuje počet rôznych komunikačných grafov pre n -prvkové vstupné vektory. Aspoň jeden graf musí byť spoločným komunikačným grafom pre aspoň $\frac{N^n}{\mathcal{G}(n)}$ vstupných n -tíc.
- teda ak je $N > \mathcal{G}(n)$, je $\frac{N^n}{\mathcal{G}(n)} > N^{n-1}$ čo je v spore s bodom 4

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

Odhad veľkosti $\mathcal{G}(n)$

- komunikačný graf má $T(n)$ vrstiev. Počet možností pre jednu vrstvu:

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

Odhad veľkosti $\mathcal{G}(n)$

- komunikačný graf má $T(n)$ vrstiev. Počet možností pre jednu vrstvu:
 - pre operáciu čítania $P(n)^{P(n)}$

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

Odhad veľkosti $\mathcal{G}(n)$

- komunikačný graf má $T(n)$ vrstiev. Počet možností pre jednu vrstvu:
 - pre operáciu čítania $P(n)^{P(n)}$
 - pre operáciu zápisu menší než $P(n)^{P(n)+O(1)}$ (počet bipartitných párovaní)

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

Odhad veľkosti $\mathcal{G}(n)$

- komunikačný graf má $T(n)$ vrstiev. Počet možností pre jednu vrstvu:
 - pre operáciu čítania $P(n)^{P(n)}$
 - pre operáciu zápisu menší než $P(n)^{P(n)+O(1)}$ (počet bipartitných párovaní)
- celkovo

$$\mathcal{G}(n) \leq \left(P(n)^{2P(n)+O(1)} \right)^{T(n)}$$

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

Odhad veľkosti $\mathcal{G}(n)$

- komunikačný graf má $T(n)$ vrstiev. Počet možností pre jednu vrstvu:
 - pre operáciu čítania $P(n)^{P(n)}$
 - pre operáciu zápisu menší než $P(n)^{P(n)+O(1)}$ (počet bipartitných párovaní)
- celkovo

$$\mathcal{G}(n) \leq \left(P(n)^{2P(n)+O(1)} \right)^{T(n)}$$

- teda stačí uvažovať súčet n čísel veľkosti $O(P(n)(\log P(n)) \log n)$ bitov

Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom

Odhad veľkosti $\mathcal{G}(n)$

- komunikačný graf má $T(n)$ vrstiev. Počet možností pre jednu vrstvu:
 - pre operáciu čítania $P(n)^{P(n)}$
 - pre operáciu zápisu menší než $P(n)^{P(n)+O(1)}$ (počet bipartitných párovaní)

- celkovo

$$\mathcal{G}(n) \leq \left(P(n)^{2P(n)+O(1)} \right)^{T(n)}$$

- teda stačí uvažovať súčet n čísel veľkosti $O(P(n)(\log P(n)) \log n)$ bitov
- Veta sa dá zovšeobecniť na ľubovoľnú funkciu n premenných takú, že keď zvolíme pevne $n - 1$ vstupov a výstup, tak je zvyšný vstup určený jednoznačne

Outline

- 1 Dolné odhady časovej zložitosti na PRAMe
 - Počítanie OR na CREW PRAMe
 - Počítanie súčtu na CRCW PRAMe s obmedzeným prístupom
 - Počítanie súčtu na CRCW PRAMe so spoločnou pamäťou

Zovšeobecnenie na CRCW PRAM bez obmedzení

Veta

Súčet n ľubovoľných celých čísel na CRCW PRAME vyžaduje čas aspoň $\lceil \log n \rceil$ nezávisle od ohraničenia na počet procesorov (tj. ak ohraničíme počet procesorov na $P(n)$, kde $P(n)$ je ľubovoľná funkcia, a neohraničíme veľkosť vstupných čísel).

Zovšeobecnenie na CRCW PRAM bez obmedzení

Veta

Súčet n ľubovoľných celých čísel na CRCW PRAMe vyžaduje čas aspoň $\lceil \log n \rceil$ nezávisle od ohraničenia na počet procesorov (tj. ak ohraničíme počet procesorov na $P(n)$, kde $P(n)$ je ľubovoľná funkcia, a neohraničíme veľkosť vstupných čísel).

Dôkaz:

- podobne ako vyššie; PRAM s $P(n)$ procesormi, ktorý pracuje $T(n)$ krokov, použije maximálne $P(n)T(n)$ rôznych buniek spoločnej pamäte

Zovšeobecnenie na CRCW PRAM bez obmedzení

Veta

Súčet n ľubovoľných celých čísel na CRCW PRAMe vyžaduje čas aspoň $\lceil \log n \rceil$ nezávisle od ohraničenia na počet procesorov (tj. ak ohraničíme počet procesorov na $P(n)$, kde $P(n)$ je ľubovoľná funkcia, a neohraničíme veľkosť vstupných čísel).

Dôkaz:

- podobne ako vyššie; PRAM s $P(n)$ procesormi, ktorý pracuje $T(n)$ krokov, použije maximálne $P(n)T(n)$ rôznych buniek spoločnej pamäte
- komunikačný graf sa zostrojí nad množinou uzlov tvaru (b, t) , kde b je číslo pamäťovej bunky a t je krok výpočtu.