Paralelné algoritmy, časť č. 3

František Mráz

Kabinet software a výuky informatiky, MFF UK, Praha

Paralelné algoritmy, 2011/2012

Obsah

1. Simulácia sekvenčných výpočtov na PRAMe v čase $O(1)$
2. Simulácie Turingových strojov na PRAMe
3. Simulácie PRAMu na Turingových strojoch

Úvod

Otázky:

1. Aké najvyššie zrýchlenie sa dá dosiahnuť na PRAMe?
2. Je možné všetky problémy z $\mathbb{P}$ zrýchliť exponenciálne na "rozumnom paralelnom modele", tj. na modele spĺňajúcom paralelnú tézu?

Definícia

Hovoríme, že funkcia $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je ws-konštruovateľná (word size), ak PRAM so šírkou slova $O(T(n))$ môže počítať $T(n)$ v konštantnom čase zo vstupu n.

- mnoho dôležitých funkcií je *ws*-konštruovateľných

Simulácia Turingovho stroja na PRAMe

Lemma (Parberry, Schnitger)

Nech $T(n)$ je ws-konštruovateľná. Potom PRAM s obmedzenou sadu aritmetických inštrukcií môže simulovať k-páskový (deterministický) $T(n)$ časovo obmedzený Turingov stroj v konštantnom čase a so šírkou slova $O(T(n))$.

Dôkaz:

- je daný Turingov stroj $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$; jeho inštrukcie očíslujeme
- procesory rozdelíme do $2^{O(T(n))}$ tímov – jeden tím pre každú postupnosť inštrukcii $r_0, r_1, \ldots, r_{T(n)-1}$ Turingovho stroja M. Každý tím bude mať $2^{O(T(n))}$ procesorov.
- Každý tím najprv určí polohy hláv na všetkých k páskach vo všetkých krokoch výpočtu M – čiastočné súčty pohybov hlavy podľa postupnosti inštrukcií.

Simulácia Turingovho stroja na PRAMe

- overiť:
  1. je postupnosť stavov určená postupnosťou inštrukcií uskutočniteľná? Inštrukcia r_0 začína v q_0, ak inštrukcia r_{i-1} prevedie M do stavu q_i, tak inštrukcia r_i začína v stave q_i.
  2. pre každú z k pások a každý krok t, $0 \leq t < T(n)$:
     1. Ak v kroku t hlava navštívila políčko prvý krát, tak symbol čítaný inštrukciou r_t musí byť symbol, ktorý tam bol v počiatočnej konfigurácii TS M.
     2. Ak hlava navštívila toto políčko pred okamžikom t naposledy v čase s, tak symbol zapísaný inštrukciou r_s sa musí zhodovať so symbolom čítaným inštrukciou r_t.

  Ako spočítať – funkcia prev.
- práve jeden tím zistí, že jeho postupnosť inštrukcií je správna, zistí, či stav dosiahnutý v r_t je koncový. Výsledok zapíše manažér tímu do spoločnej pamäte.

Simulácia Turingovho stroja na PRAMe

Počet proc.	Čas	Šírka slova	Model
$2^{O(T(n))}$	$O(1)$	$O(T(n))$	COMMON

- ľahko sa dá zovšeobecniť pre TS počítajúce funkciu – využije sa last()
- zrejme nereálny výsledok
- ak šírka slova $W(n) = T(n)^{O(1)}$, tak by PRAM mohol spĺňať paralelnú tézu – BUDE NA PREDNÁŠKE NESKÔR! Ukážeme, že potom je možné dosiahnuť ľubovoľné polynomické zrýchlenie.

Simulácia Turingovho stroja na PRAMe s obmedzenou šírkou slova

Veta

Nech funkcia $B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je ws-konštruovateľná a PRAM so šírkou slova $W(n)$ môže simulovať ľubovoľný $B(n)$ časovo obmedzený deterministický TS v čase $C(n)$. Potom PRAM so šírkou slova $O(W(n) + B(n) + \log T(n))$ môže simulovať ľubovoľný $T(n)$ časovo obmedzený deterministický TS v čase

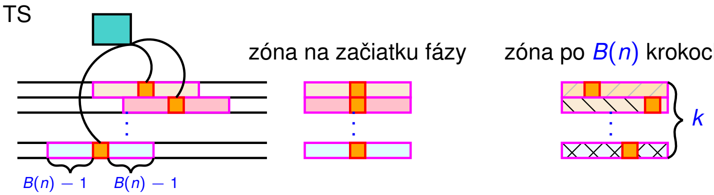
$$O\left(\frac{T(n)}{B(n)} + C(n)\right).$$

Dôkaz:

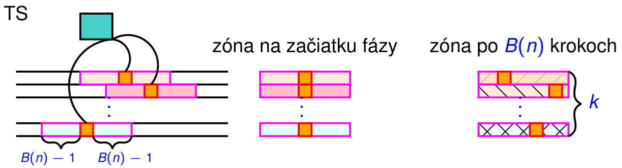
- Nech je daný $T(n)$ časovo obmedzený Turingov stroj $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Simulácia Turingovho stroja na PRAMe s obmedzenou šírkou slova

- Simulácia bude mať $O(\lceil \frac{T(n)}{B(n)} \rceil)$ fáz, z ktorých každá bude zodpovedať $B(n)$ krokom výpočtu stroja M. Budeme počítať konfigurácie na konci každej fázy.
- zóna – časť pásky, ktorá sa môže zmeniť počas jednej fázy, tj. $k(2B(n) - 1)$ políčok pásky, ktoré sú vo vzdialenosti max. $B(n)$ od pozície hlavy na začiatku fázy.



Simulácia Turingovho stroja na PRAMe s obmedzenou šírkou slova



- V priebehu fázy sa simulácia riadi iba obsahom zóny. Na konci fázy sa obsah zóny aktualizuje.
- *predvýpočet:* tabuľka s $2^{O(B(n))}$ položkami.

  Index – obsah zóny na začiatku fázy,

  obsah políčka – obsah zóny na konci fázy (tj. po $B(n)$ krokoch výpočtu TS M).
- Na predvýpočet je treba šírka slova $O(W(n))$ bitov a čas $C(n)$.
- dá sa zovšeobecniť na TS počítajúci funkciu: využijeme funkciu last

Simulácia Turingovho stroja na PRAMe s obmedzenou šírkou slova

- Na začiatku fázy určíme obsah zóny “vykrojením” úsekov pások do vzdialenosti $B(n) - 1$ od polôh hláv. Z tabuľky zistíme obsah zóny po $B(n)$ krokoch. Aktualizujeme obsah zóny a polohy hláv na konci fázy.
- $T(n)$ krokov stroja M vyžaduje $\lceil \frac{T(n)}{B(n)} \rceil$ fáz. časová zložitosť:
  - Predvýpočet: $O(C(n))$.
  - Každá fáza: $O(1)$ (obmedzená sada aritmetických inštrukcií).

  Celkom $O(C(n) + \frac{T(n)}{B(n)})$.
- Šírka slova je maximum z:
  - $O(W(n) + B(n))$ – pri predvýpočte,
  - $O(B(n))$ – na identifikačné čísla procesorov pre všetky fázy.
  - $O(\log T(n))$ – na uloženie polôh hláv v konfigurácii.

Simulácia Turingovho stroja na PRAMe spĺňajúcom paralelnú tézu

Veta

Nech funkcia $B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je ws-konštruovateľná funkcia. $T(n)$ časovo obmedzený det. TS sa dá simulovať v čase $O(\frac{T(n)}{B(n)})$ s PRAMom so šírkou slova $O(B(n) + \log T(n))$.

Dôkaz: Ľubovoľný $B(n)$ časovo obmedzený TS sa dá simulovať v konštantnom čase na PRAMe so šírkou slova $O(B(n)) \Rightarrow$ dosadíme do predchádzajúcej vety. ■

Ľubovoľné polynomické zrýchlenie je možné na PRAMe spĺňajúcom paralelnú tézu

- Ak $T(n)$ je *ws*-konštruovateľná, tak aj $B(n) = T(n)^{\varepsilon}$ je *ws*-konštruovateľná.

Dôsledok

Ak je $T(n)$ ws-konštruovateľná funkcia, potom $T(n)$ časovo obmedzený det. TS sa dá simulovať v čase $O(T(n)^{1-\varepsilon})$, pre ľubovoľné reálne číslo $\varepsilon > 0$, PRAMom spĺňajúcom paralelnú tézu.

- (Pozn. To že PRAM so šírkou slova $W(n) = T(n)^{\varepsilon}$ počítajúci v čase $O(T(n)^{1-\varepsilon})$ spĺňa paralelnú tézu – BUDE NA PREDNÁŠKE NESKÔR!)
- Nevieme, či je možné exponenciálne zrýchlenie (polylogaritmický čas) pre úlohy z $\mathbb{P}$, ale **ľubovoľné polynomické zrýchlenie je možné!**

Paralelná téza

“paralelný čas” $\approx$ “sekvenčný priestor”

1. Aby PRAM spĺňal paralelnú tézu, tak je ho treba obmedziť
   - šírku slova
   - sadu aritmetických inštrukcií
   - počet procesorov
2. Paralelná téza ohraničuje, aké zrýchlenie sa dá dosiahnuť na rozumnom modele.
   Napr. to čo sa dá vyriešiť na “rozumnom modele” v čase $\log^{O(1)} n$, tak sa dá vyriešiť sekvenčne v polylogaritmickom priestore (a naopak)

Tranzitívny uzáver grafu

GAP – Graph Accessibility Problem

Vstup: orientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, n\}$ je množina vrcholov, E je množina orientovaných hrán zadaná maticou susednosti $A[i, j] = true \Leftrightarrow (i, j) \in E$.

Výstup: graf tranzitívneho uzáveru $G' = (V, E')$, kde $(x, y) \in E' \Leftrightarrow$ v G existuje cesta z x do y.

Alg.:
- n^3 procesorov

  PID:

i	j	k

- $i := \lfloor \frac{PID}{n^2} \rfloor$;
  $j := \lfloor \frac{PID \mod n^2}{n} \rfloor$;
  $k := PID \mod n$;
  $A[i, i] := true$;
  $L := 1$;
  while $L < n$ do
      begin
          if $A[i, k]$ and $A[k, j]$ then $A[i, j] := true$;
          $L := L * 2$;
      end;

Tranzitívny uzáver grafu

GAP – Graph Accessibility Problem

- Na konci t-tej iterácie cyklu je $L = 2^t$ a $\forall 0 \leq i, j < n$ platí
  $A[i, j] = true \Leftrightarrow \exists$ v G cesta z i do j dĺžky max. L
  (dokáže sa indukciou podľa t)
-

Počet proc.	Čas	Šírka slova	Model
n^3	$O(\log n)$	$O(\log n))$	COMMON

- **dokonca s minimálnou sadou aritmetických inštrukcií** $(+, =, div2)$

Simulácia TS na PRAMe

Veta (Goldschlager)

*Predpokladajme, že $S(n) = \Omega(\log n)$ sa dá spočítať PRAMom s minimálnou sadou aritmetických inštrukcií, šírkou slova $O(S(n))$ v čase $O(S(n))$ z jediného vstupu n. Potom $S(n)$ priestorovo obmedzený **nedeterministický** TS môže byť simulovaný v čase $O(S(n))$ na PRAMe s minimálnou sadou aritmetických inštrukcií a šírkou slova $O(S(n))$.*

Dôkaz:

- Predpokladáme, že TS M rozhoduje nejaký jazyk a má jedinú prijímaciu konfiguráciu.
- $S(n)$ priestorovo obmedzený TS má maximálne $2^{O(S(n))+\log n} = 2^{O(S(n))}$ konfigurácií. Skonštruujeme graf G možných výpočtov: uzly budú konfigurácie, z konfigurácie K_1 do konfigurácie K_2 vedie hrana práve vtedy, keď $K_1 \vdash_M K_2$.
- M prijíma vstup $x \Leftrightarrow$ v G existuje cesta z počiatočnej konfigurácie do koncovej konfigurácie – algoritmus na riešenie GAP.
- Časová zložitosť: $\log 2^{O(S(n))} = O(S(n))$, šírka slova tá istá.

Simulácia TS na PRAMe

Keď funkciu priestorovej zložitosti nevieme odhadnúť

Dôsledok

*$S(n)$ priestorovo obmedzený **deterministický** TS sa dá simulovať PRAMom s minimálnou sadou aritmetických inštrukcií a šírkou slova $O(S(n))$ v čase $O(S(n) \log S(n))$*

Dôkaz:

- Funkcia $S(n)$ sa nemusí dať dobre počítať. Stačí, že poznáme, keď TS dopočíta. Skúšame postup z predchádzajúceho dôkazu pre $S(n) = 1, 2, 4, 8, \ldots$.

Simulácia PRAMu na Turingovom stroji

Veta (Goldschlager)

$T(n)$ časovo obmedzený PRAM M so šírkou slova $W(n)$ môže byť simulovaný deterministickým TS v priestore $T(n)(W(n) + \log T(n)) + S(n)$, kde $S(n)$ je priestor, ktorý potrebuje TS na simuláciu jednej inštrukcie jedného procesoru PRAM.

Dôkaz:

- použije sa PRIORITY PRAM
- procesory nebudú používať lokálne pamäte
- inštrukcie očíslované $1, 2, 3, \ldots$.
- 0-tý register je nulový počas výpočtu a je do neho vložené číslo

  1 ak M vstup prijíma, alebo
  -1 ak M vstup neprijíma.

  Potom sa už hodnota registru 0 nemení dokiaľ nedopočítajú všetky procesory.

Simulácia PRAMu na Turingovom stroji

function instruction(i,t)
{vracia hodnotu PC i-teho procesoru v čase t}
begin if $t = 0$ **then** return 1
else begin
h := instruction(i,$t - 1$);
case h-ta inštrukcia **of**
"goto m if $\overline{r}_j > 0$": **if** register(j,$t - 1$) > 0 **then** return m
else return $h + 1$;
"halt" : return h;
otherwise : return $h + 1$;
end
end
end;

function input(i)
{posuň čítaciu hlavu na i-te políčko a vráť znak, ktorý tam je}

Simulácia PRAMu na Turingovom stroji

function register(j,t)
  {*vracia obsah registru* j *v čase* t}
begin if $t = 0$ **then** return (input(j))
  else {skontroluj, či tam niekto nezapisoval}
    begin winner := $P(n)$;
      for $w := P(n) - 1$ downto 0 **do**
        begin
          h := instruction(w,$t - 1$);
          if h-ta inštrukcia je zápis do $\bar{r}_j$
            (($\bar{r}_j := d$) or [($\bar{r}_{\bar{r}_x} := d$) and (register(r_x,$t - 1$)=j)])
          then
            begin *winner* := w; *value* := d; **end**
        end
    end;
  if *winner* $< P(n)$ **then** return *value*
    else return register(j,$t - 1$)
end;

Simulácia TS na PRAMe

- M prijíma vstup $\Leftrightarrow$ register(0,$T(n)$)=1.
- $T(n)$ sa možno ťažko počíta, tak skúšame $T(n) = 1, 2, 3, \ldots$.
- výpočet register(0,$T(n)$)=1 – rekurzia hĺbky $T(n)$; počet premenných použitých v jednej procedúre je konštantný, každá so šírkou slova buď $O(W(n))$ alebo $O(\log T(n))$,
- $O(\log n)$ potrebujeme ako pointer na vstup. Celkovo pracovný priestor

$$T(n)(W(n) + logT(n)) + S(n) + \log n,$$

kde $S(n)$ je priestor, v ktorom Turingov stroj nasimuluje vykonanie jednej inštrukcie jedného procesora. $\log n$ môžeme zanedbať, pretože $W(n) = \Omega(\log n)$ – taká šírka slova je nutná na adresovanie n vstupov.

Obmedzenie sily PRAMu do "rozumných medzí"

Jednotková cena inštrukcie:

- môžeme používať jednotkovú cenu takých inštrukcií, ktoré sa dajú simulovať TS v čase $T(n)^{O(1)}$, kde $T(n)$ je čas výpočtu PRAMu
    - ak to prijmeme, tak PRAM spĺňa paralelnú tézu, ak $W(n) = T(n)^{O(1)} \Rightarrow$ to umožňuje stále PRAM s $2^{T(n)^{O(1)}}$ procesormi
    - preto zástancovia lenivej aktivácie trvajú na $P(n) = 2^{O(T(n))}$ alebo dokonca na $P(n) = n^{O(1)}$

Obmedzenie sily PRAMu do “rozumných medzí”

Používané obmedzenia:

1. Obmedzenia množiny inštrukcií (často preto, aby sa dala používať jednotková cena inštrukcií):
   a) Jednotlivé procesory nesmú používať inštrukcie, ktoré sa nedajú simulovať na det. TS v čase $T(n)^{O(1)}$, kde $T(n)$ je doba výpočtu na PRAMe.
   b) každá inštrukcia procesora sa dá simulovať TS v priestore $T(n)^{O(1)}$ – slabšie obmedzenie než a).
2. Obmedzenie počtu procesorov a paralelného času (zabrániť simulácii v konštantnom čase):
   a) $P(n) < 2^{O(T(n))}$ – dôsledok lenivej aktivácie.
   b) $P(n) = n^{O(1)}$ a $T(n) = \log^{O(1)} n$ – NC.
3. Obmedzenie šírky slova:
   a) $W(n) = O(T(n))$.
   b) $W(n) = T(n)^{O(1)}$ – simulácia jednej inštrukcie viz. 1b).
   c) $W(n) = n^{O(1)}$ – širšie slovo – veľkosť vstupu nie je dobrou mierou, ak vstupné čísla môžu mať viac než polynomický počet bitov.